

ประเสริฐ อินประเสริฐ

อาจารย์ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163 Prasert_Inp@yahoo.com

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นทรงกระบอกกลวงผนังบางซ้อนกันเป็นจำนวนมาก ซึ่งแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนช์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความความร้อนจำเพาะ $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50°C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $500 \text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$ เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า 25 mm. ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 360 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.43 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

คำสำคัญ: วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การตอบสนองอุณหภูมิ, อุณหภูมิภายในทรงกระบอก

Abstract

This paper presents to calculate inside cylinder temperature response by the finite resistance-capacitance method. By divide a material to many thin wall hollow cylindrical elements, each element can change to be a conduction resistance and a heat capacitance. For calculate convection heat transfer on a surface area to fluid use a convection resistance. Using ELECTRONIC WORKBENCH software to calculate this finite resistance-capacitance model and compare with analytical method to find temperature response errors. On the calculation let an aluminum cylinder infinite high, 50 mm radius. This cylinder initially at 200°C has thermal conductivity $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, density 2702 kg/m^3 and specific heat $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$. This object is placed suddenly in fluid at 50°C . Estimate the convection heat transfer coefficient is $500 \text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$. Calculating temperature at 25 mm depth from the surface by this software to 360 sec having an error result 0.43 %. From error results show that this finite resistance-capacitance model can be calculated by electrical theory which easy to use electrical software to solve in heat transfer response problem of complicated materials in the future.

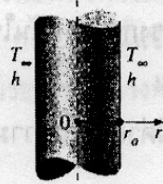
Keyword: finite resistance-capacitance method, temperature response, inside cylinder temperature

1. บทนำ

วิธีไฟไนต์ริซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์เป็นการคำนวณการถ่ายความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยน[4][5][7] โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชิ้นเล็กๆเป็นจำนวนมาก แต่ชิ้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมคำนวณวงจรไฟฟ้าคำนวณแบบจำลองนี้ซึ่งวิธีนี้มีข้อดีที่ไม่ต้องใช้สมการ Differential ในการเริ่มต้นแก้ปัญหาเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์และบราวน์ดิอิลิเมนต์ ในการคำนวณสามารถนำตัวต้านทานและตัวเก็บความร้อนมาต่อกันได้เลย

ในการแก้ปัญหาการถ่ายความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนที่มีเพียงขึ้นเดียว ได้แสดงการคำนวณให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้[1] และเมื่อเพิ่มจำนวนชิ้นมากขึ้นให้เป็นวิธีไฟไนต์ริซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาอุณหภูมิในผนังที่เวลาผ่านไปจะให้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนชิ้นที่มากขึ้น [2]

บทความนี้จะทำการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ในพิกัดทรงกระบอก(Cylindrical coordinate) โดยแบ่งวัตถุเป็นชิ้นส่วนย่อยรูปทรงกระบอกกลางและทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณอุณหภูมิภายในเนื้อวัตถุรูปทรงกระบอก ซึ่งน่าจะสามารถลดเวลาในการคำนวณและแบ่งจำนวนชิ้นย่อยลงได้เป็นจำนวนมาก เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้ชิ้นส่วนย่อยแบบลูกบาศก์ในพิกัดแกนตั้งฉาก(Rectangular coordinate) แต่การที่จะนำแบบจำลองนี้ไปใช้ในปัญหาที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นจำเป็นต้องตรวจสอบความถูกต้องกับทฤษฎีที่มีอยู่ว่ามีความผิดพลาดอย่างไรหรือไม่



รูปที่ 1 ทรงกระบอกที่พิจารณารวมลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า [8]

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกระบอกที่รัศมี r โดยทรงกระบอกมีรัศมี r_0 ดังรูปที่ 1 ซึ่งมีความยาวมากเมื่อเทียบกับเส้นผ่านศูนย์กลางทรง

กระบอก จะได้ว่าอุณหภูมิที่ระดับความลึกเดียวกันจากผิวหน้ามีค่าเท่ากันตลอด

2.1 เงื่อนไขการคำนวณ

พิจารณาถึงความเป็นไปได้ที่อุณหภูมิในทรงกระบอกจะมีค่าไม่เท่ากัน หลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่างจากผิวทรงกระบอกเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ สภาพการนำความร้อนวัสดุมีค่าต่ำมาก, สัมประสิทธิ์การพาความร้อนผิววัสดุสูงมาก หรือทรงกระบอกมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการนี้ แสดงเป็นค่า Biot number (Bi) ถ้าผลการคำนวณค่า $Bi > 0.1$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าการกระจายอุณหภูมิมีความแตกต่างกัน $> 5\%$ [8] ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขบังคับให้ต้องคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ ถ้าต้องการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

$$Bi = \frac{hr_0}{k} \quad (1)$$

เมื่อ h - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ($W/m^2 \cdot ^\circ C$)

r_0 - รัศมีทรงกระบอก (m)

k - สภาพการนำความร้อนวัสดุ ($W/m \cdot ^\circ C$)

2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใดๆ

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใดๆเป็นดังนี้[3]

$$\frac{(T_{x,t} - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0(\xi_n \frac{r}{r_0}) \quad (2)$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} J_0(\xi_n r^*) \quad (3)$$

โดย

$$C_n = \frac{2}{\xi_n} \frac{J_1(\xi_n)}{J_0^2(\xi_n) + J_1^2(\xi_n)} \quad (4)$$

$$\xi_n \frac{J_1(\xi_n)}{J_0(\xi_n)} = Bi \quad (5)$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p r_0^2} = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad (6)$$

เมื่อ $T_{x,t}$ - อุณหภูมิวัสดุที่ความลึกจากผิวหน้า x ณ เวลา t ($^\circ C$)

T_∞ - อุณหภูมิของไหล ($^\circ C$)

T_i - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ($^{\circ}\text{C}$)

t - เวลาที่ผ่านไป (s)

α - ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความร้อน (m^2/s)

ρ - ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_p - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ ($\text{J}/\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}$)

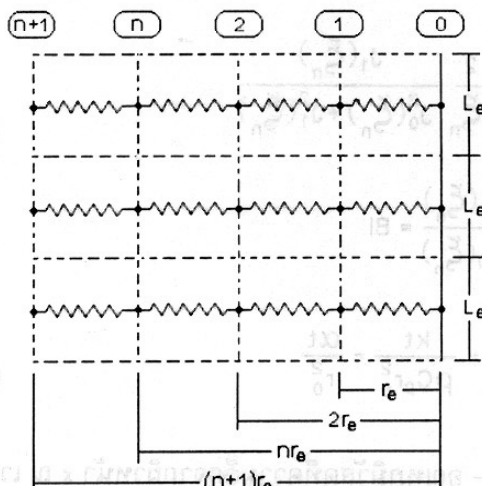
สำหรับการคำนวณโดยประมาณ (Approximate solution) นั้น จะใช้ค่า $n=1$ เท่านั้น ซึ่งต้องตรวจสอบ Fourier number (Fo) ถ้าผลการคำนวณค่า $Fo > 0.2$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ที่เวลาต่างๆมีความผิดพลาด $< 2\%$ [8] แต่ถ้าค่า $Fo < 0.2$ ต้องเพิ่มอันดับ n ให้มากขึ้น เช่น $n=1, 2$ หรือ $n=1, 2, 3$ เป็นต้น

3. การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์ริซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชั้นเล็กๆ รูปทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางแล้วซ้อนด้วยทรงกระบอกกลวงจำนวนมาก ทรงกระบอกกลวงและตันแต่ละชั้นมีความยาว L_e เท่ากันหมดซึ่งผลที่ได้จะเรียงตัวกันเป็นชั้นความหนา L_e นั้นเองเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้รัศมีทรงกระบอกกลวงชั้นในสุดมีขนาดเท่ากับรัศมีทรงกระบอกตัน r_e และให้ความหนาทรงกระบอกกลวงทุกชั้นมีขนาด r_e เท่ากันหมด ซึ่งแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว

3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อนในเนื้อวัสดุ

การวิเคราะห์ถ่ายเทความร้อนในแนวรัศมี ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง และการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุระหว่างแต่ละชั้น

3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกแนวที่ $n+1$ และผิวทรงกระบอกแนวที่ n ในกรอบเส้นประเพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้[4]

$$R_{\text{HCCond, inside radial}} = \frac{\ln(r_{n+1}/r_n)}{2\pi k L_e} = \frac{\ln[(n+1)/n]}{2\pi k L_e} \quad (7)$$

เมื่อ $R_{\text{HCCond, inside radial}}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกกลวงในแนวรัศมี ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

r_{n+1}, r_n - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element ชนิดทรงกระบอกกลวงที่ n

n - หมายเลขทรงกระบอกกลวง รูปที่ 2

k - สภาพการนำความร้อน ($\text{W}/\text{m}\cdot^{\circ}\text{C}$)

L_e - ความยาว Element (m)

3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีทรงกระบอกตัน

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกระบอกตันแนวที่ 1 และจุดศูนย์กลางทรงกระบอกตันแนวที่ 0 ของรูปที่ 2 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าพื้นที่ผิวของจุดศูนย์กลางทรงกระบอกมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความร้อนของทรงกระบอกกลวงได้ด้วยเหตุนี้จึงกำหนดให้อุณหภูมิที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอกเท่ากับอุณหภูมิที่ผิว นั่นคือความต้านทานความร้อนมีค่าเท่ากับศูนย์ จึงได้ค่าดังนี้

$$R_{\text{SCCond, inside radial}} = 0 \quad (8)$$

เมื่อ $R_{\text{SCCond, inside radial}}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกตันในแนวรัศมี ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

3.2 ตัวเก็บความร้อน

ตัวเก็บความร้อนมีค่าเท่ากับความร้อนของวัสดุ ดังนี้[1]

$$C_t = mC_p = \rho V C_p \quad (9)$$

เมื่อ C_t - ความจุความร้อน ($\text{J}/^{\circ}\text{C}$)

m - มวลวัสดุ (kg)

ρ - ความหนาแน่น (kg/m^3)

V - ปริมาตร (m^3)

ตัวเก็บความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 แบบคือเนื้อทรงกระบอกตัน และเนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวง แต่เนื่องจากการคำนวณนี้แบ่งออกเป็น Node ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างทรงกระบอก ดังนั้นจึงแยกตัวเก็บความร้อนออกเป็น 3 ประเภทคือผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด, รอยต่อทรงกระบอก และแกนกลางทรงกระบอกตัน

3.2.1 ตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด

แบ่งเนื้อจำนวนครึ่งความหนาของวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านนอกให้เป็นตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกระบอกด้านนอกสุด โดยสมมุติให้ชั้นนอกสุดเป็นชั้นที่ n จะได้

$$\begin{aligned} V_{HC,edge} &= \pi(r_n^2 - r_{n-1/2}^2)L_e \\ &= \pi r_e^2 L_e (n-1/4) \\ C_{HC,edge} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (n-1/4) \end{aligned} \quad (10)$$

เมื่อ $C_{HC,edge}$ - ความจุความร้อนที่ผิวทรงกระบอกกลวงชั้นนอกสุด ($J/^\circ C$)

3.2.2 ตัวเก็บความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอก

บริเวณรอยต่อทรงกระบอก ใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านในของชั้นที่ n+1 จำนวนครึ่งความหนา และใช้เนื้อวงแหวนทรงกระบอกกลวงด้านนอกของชั้นที่ n จำนวนครึ่งความหนาจะได้

$$\begin{aligned} V_{HC,inside} &= \pi(r_{n+1/2}^2 - r_{n-1/2}^2)L_e \\ &= \pi r_e^2 L_e (2n) \\ C_{HC,inside} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (2n) \end{aligned} \quad (11)$$

เมื่อ $C_{HC,inside}$ - ความจุความร้อนที่รอยต่อทรงกระบอก ($J/^\circ C$)

3.2.3 ตัวเก็บความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน

เนื่องจากได้แบ่งเนื้อที่ผิวทรงกระบอกตันแล้วไปครึ่งหนึ่งให้กับรอยต่อที่ n=1 ดังนั้นจึงเหลือเนื้อสำหรับเก็บความร้อนเพียงครึ่งเดียวของรัศมีทรงกระบอกตัน

$$\begin{aligned} V_{SC,cen} &= \pi \left[\frac{r_e}{2} \right]^2 L_e \\ C_{SC,cen} &= \rho \pi r_e^2 L_e C_p (1/4) \end{aligned} \quad (12)$$

เมื่อ $C_{SC,cen}$ - ความจุความร้อนที่แกนกลางทรงกระบอกตัน ($J/^\circ C$)

3.3 ตัวต้านทานการพาความร้อน

ตัวต้านทานการพาความร้อนมีค่าดังนี้ [4]

$$R_{Conv} = \frac{1}{hA_s} \quad (13)$$

เมื่อ R_{Conv} - ความต้านทานการพาความร้อน ($^\circ C/W$)

$h..$ - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ($W/m^2 \cdot ^\circ C$)

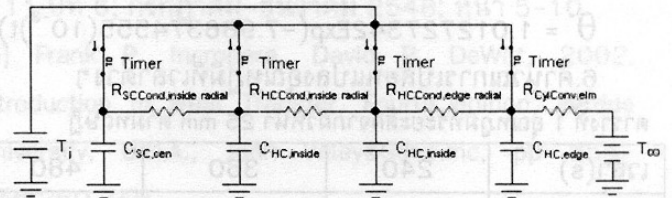
A_s - พื้นที่ผิววัสดุที่สัมผัสกับของไหล (m^2)

$$A_s = 2\pi r_o L_e \quad m^2$$

แทนค่า A_s ในสมการ (13)

$$R_{CylConv,elm} = \frac{1}{h2\pi r_o L_e} \quad (14)$$

เมื่อ $R_{CylConv,elm}$ - ความต้านทานการพาความร้อนที่ผิวทรงกระบอก Element ($^\circ C/W$)



รูปที่ 3 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยทรงกระบอกตันเป็นแกนกลางและทรงกระบอกกลวง 2 ชั้น อยู่ในของเหลว

4. การคำนวณเปรียบเทียบ

เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี (r_o) 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น (T_i) $200^\circ C$ มีค่าสภาพการนำความร้อน (k) $237 W/m \cdot ^\circ C$, ความหนาแน่น (ρ) $2702 kg/m^3$ และความจุความร้อนจำเพาะ (C_p) $903 J/kg \cdot ^\circ C$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ (T_∞) $50^\circ C$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) $500 W/m^2 \cdot ^\circ C$

4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. ตรวจสอบค่า Biot number (Bi) จาก (1)

$$r_o (\text{รัศมีทรงกระบอก}) = 0.05 \quad m$$

$$Bi = 0.1054852320675$$

ค่า Bi มากกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางเนื้อวัสดุแตกต่างจากบริเวณพื้นผิว

2. ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (6)

$$\alpha = 9.71348896228(10^{-5}) m^2/s$$

$$Fo = 3.885395585(10^{-2})t$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution ($n=1$) ได้ เมื่อ $Fo > 0.2$ ที่ $t > 5.14748101254 s$

3. คำนวณค่าคงที่ ξ_n จากสมการ (5)

คำตอบสมการนี้ได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ $n=1$ หรือ ξ_1 ค่ามากถัดไปเป็น $n=2$ หรือ ξ_2

จากสมการ Trial & error จะได้ค่าเดียวคือ

$$\xi_1 = 0.4533746319 \text{ rad}$$

4.คำนวณค่าคงที่ C จาก (4)

$$C_1 = 1.025893673$$

5.หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึก

จากผิวหน้า(x) 25 mm จาก (3)

$$r' = 25/50 = 0.5$$

$$J_0(\xi_1 r') = J_0(0.4533746319 * 0.5) = 0.9871659888$$

$$\theta^* = 1.012727342 \text{Exp}(-7.986374555(10^{-3})t)$$

6.คำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

ตารางที่ 1 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm ตามทฤษฎี

เวลา(s)	240	360	480
θ^*	0.14896	0.05713	0.02191
อุณหภูมิ($^{\circ}\text{C}$)	72.34388	58.56931	53.28650

4.2 คำนวณด้วยวิธีวิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบ็นซ์คำนวณ แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอื่นๆคำนวณได้

เริ่มต้นด้วยการแบ่งแท่งอลูมิเนียมที่มีความยาวมากให้มีความยาวเพียง(L_c) 1 m. เป็นหลายๆท่อน แต่จะคำนวณเพียงท่อนเดียวเท่านั้น เนื่องจากมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกท่อน หลังจากนั้นให้ทำการแบ่งออกเป็นชั้นๆตามความลึก 16 ระดับความลึกเท่าๆกันจากผิวหน้าถึงจุดศูนย์กลางทรงกระบอก โดยให้แกนกลางเป็นทรงกระบอกตัน 1 ชั้นและทรงกระบอกกลวงซ้อนกันจำนวน 15 ชั้น จะคำนวณได้ค่ารัศมีทรงกระบอกตัน(r_c) $50/16=3.125$ mm. การเพิ่มรัศมีวงแหวนคงที่ตลอดโดยมีความหนาทรงกระบอกกลวง($r_i=r_1=r_2$) 3.125 mm. ทุกชั้นจะได้

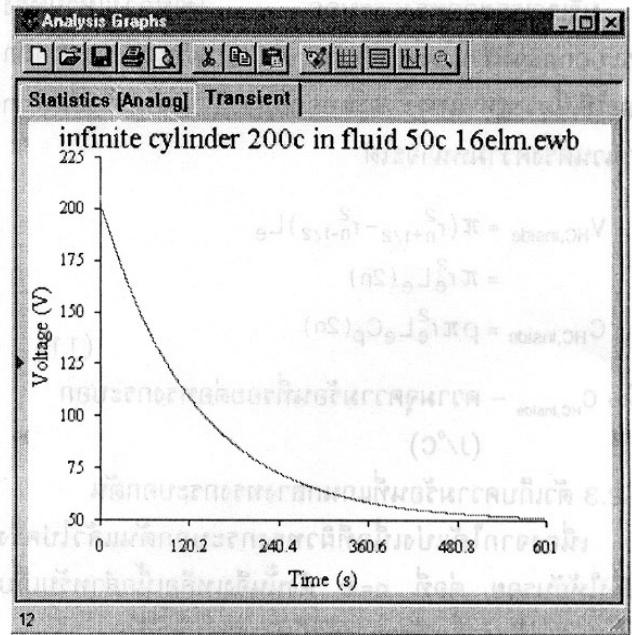
$r_2=r_1+r_1=2r_c=6.25\text{mm}., r_3=r_1+2r_c=3r_c=9.375\text{mm}., \dots, r_{16}=r_1+15*r_c=16r_c=50$ mm. จากนั้นทำการคำนวณหาค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุในแนวรัศมีของแต่ละชั้นย่อย จาก(8) $R_{SCCond0-1,inside radial}=0$ $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ จาก(7) เช่น $R_{HCCond1-2,inside radial}=4.654759498(10^{-4})$ $^{\circ}\text{C}/\text{W}$, $R_{HCCond15-16,inside radial}=4.334018843(10^{-5})$ $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ คำนวณหาค่าความต้านทานการพาความร้อนจาก(14) $R_{CylConv,elm}=6.366197723(10^{-3})$ $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ และตัวเก็บประจุของแต่ละชั้นย่อยที่ได้แบ่งไว้ จาก(12) $C_{SCO, cen}=18.71384464$ $\text{J}/^{\circ}\text{C}$ จาก(11) เช่น

$$C_{HC1,inside}=149.7107571 \text{ J}/^{\circ}\text{C},$$

$$C_{HC15,inside}=2245.661357 \text{ J}/^{\circ}\text{C} \text{ จาก(10)}$$

$C_{HC16,edge}=1178.972212$ $\text{J}/^{\circ}\text{C}$ แล้วเขียนตัวต้านทานและตัวเก็บประจุลงใน Work sheet ของโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบ็นซ์

จากรูปที่ 3 ในรูปได้ใส่ตัว Timer switch 1 วินาทีไว้เพื่อตั้งค่าสภาวะอุณหภูมิเริ่มต้น(T_i) หลังจาก 1 วินาทีแล้วการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื้อวัสดุจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของไหล(T_{∞}) แล้วจึงให้โปรแกรมคำนวณการเปลี่ยนแปลงค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า(v) โดยเลือกการวิเคราะห์แบบ Transient ซึ่งค่าที่ได้นี้คือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ(T)เมื่อเวลาผ่านไปนั่นเอง โดยกำหนดจุดที่จะทำการเปลี่ยนแปลงอยู่ที่ความลึกจากผิวหน้า 25 mm คือที่รอยต่อระหว่างตัวต้านทานที่ 8 กับ 9 ($n=8$) ตั้งเวลาสิ้นสุดการวิเคราะห์ถึงวินาทีที่ 601 ในระหว่างการคำนวณโปรแกรมจะเขียนกราฟแสดงการการเปลี่ยนแปลงศักย์ไฟฟ้า(v)หรืออุณหภูมิ(T) แสดงดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบ็นซ์ จากเวลา 0 ถึง 601 วินาที

ซึ่งจะอ่านค่าอุณหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm จากโปรแกรม

เวลา(s)	1+240	1+360	1+480
อุณหภูมิ($^{\circ}\text{C}$)	72.39819	58.82353	53.39367

5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดยนำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความผิดพลาดดังนี้ ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	240	360	480
Error(%)	0.07507	0.43404	0.20112

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดที่น้อยมาก สำหรับเวลาที่มากกว่า 601 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้ T_{∞} มากยิ่งขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง จึงมีการใช้ Bessel function มาช่วยแก้สมการซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นค่าโดยประมาณเท่านั้น

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้แท่งทรงกระบอกอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. และมีความสูงไม่จำกัด มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน $237 \text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความจุความร้อนจำเพาะ $903 \text{ J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50°C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $500 \text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$ เมื่อกำหนดอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า 25 mm. ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 360 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.43 % จากทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง

จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ชิ้นส่วนทรงกระบอกที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุเป็นจำนวนมากนี้ สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าที่ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] ประเสริฐ อินประเสริฐ; "การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ ด้วยวิธีซีสแทนซ์-คาปาซีแทนซ์"; วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม; เล่มที่ 10 ปีที่ 5; กรกฎาคม-มิถุนายน 2548; หน้า 28-33
- [2] ประเสริฐ อินประเสริฐ; "การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในผนังด้วยวิธีไฟไนต์ซีสแทนซ์-คาปาซีแทนซ์"; วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม; เล่มที่ 11 ปีที่ 6; กรกฎาคม-ธันวาคม 2548; หน้า 5-10
- [3] Frank P. Incropera, David P. DeWitt, 2002. Introduction to Heat Transfer, Fourth edition, Purdue University, U.S.A., John Wiley&Sons.Inc, pp 254-256,260,849
- [4] Frank W. Schmidt, Robert E. Henderson, Carl H. Wolkemuth.; 'Introduction to Thermal Sciences'; The Pennsylvania State University; U.S.A.; Second edition; John Wiley&Sons,Inc; Singapore; 1993; pp 388,430
- [5] Jan F. Kreider, Ari Rabl; 'Heating and Cooling of Buildings'; University of Colorado at Boulder; U.S.A.; McGraw-Hill, inc; New York; 1994; pp 370-381
- [6] Martin Marz,Paul Nance; 'Thermal Modeling of Power-electronic Systems'; Fraunhofer Institute for Integrated Circuit; http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/Q2_Q0.pdf, (accessed on Oct 2005)
- [7] Satish P. Ketkar; 'Numerical Thermal Analysis'; The MacNeal-Schwendler Corporation; U.S.A.; ASME Press; New York; 1999; pp 59-70
- [8] Yunus A. Cengel; 'Heat Transfer a Practical Approach'; University of Nevada,Reno; U.S.A.; McGraw-Hill, Inc; 1998; pp 228-229,233-234,237