

การคำนวณผลการตอบสนองของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีทรงกลม ด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

Calculating Temperature Response at Mid-Radius of Sphere

By Finite Resistance-Capacitance Method

ประเสริฐ อินประเสริฐ

อาจารย์ประจำ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม

235 ถนนเพชรเกษม เขตภาษีเจริญ กรุงเทพฯ 10163

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลตอบสนองของอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีทรงกลมที่เปลี่ยนไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์ โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นทรงกลมกลวงเปลือกบางซ้อนกันเป็นจำนวนมาก ซึ่งแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์กเบ็นซ์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด เมื่อกำหนดให้ทรงกลมอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน 237 W/m.°C, ความหนาแน่น 2702 kg/m³ และ ความจุความร้อนจำเพาะ 903 J/kg. °C ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50 °C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน 500 W/m².°C เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า 25 mm. ด้วยโปรแกรมโดยใช้เวลาผ่านไป 240 วินาที ปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.57 % จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองความร้อนวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์นี้สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าได้ ซึ่งการคำนวณการเปลี่ยนอุณหภูมิในพิกัดทรงกลมนี้ใช้ในคำนวณแก้ปัญหาการเก็บความร้อนของก้อนกลมที่บรรจุอยู่ในเพคเบด

คำสำคัญ: วิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์, การตอบสนองของอุณหภูมิ, อุณหภูมิภายในทรงกลม

Abstract

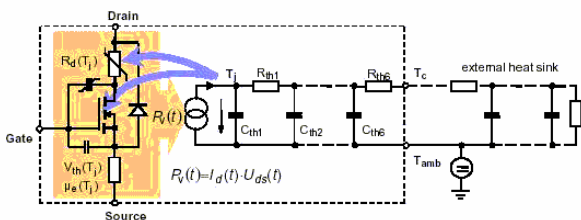
This paper presents to calculate temperature response at mid-radius of sphere by the finite resistance-capacitance method. By divide a material to many thin shell hollow sphere elements, each element can change to be a conduction resistance and a heat capacitance. For calculate convection heat transfer on a surface area to fluid use a convection resistance. Using an ELECTRONIC WORKBENCH software to calculate this finite resistance-capacitance model and compare with analytical method to find temperature response errors. On the calculation let an aluminum sphere, 50 mm radius. This sphere initially at 200 °C has thermal conductivity 237 W/m.°C, density 2702 kg/m³ and specific heat 903 J/kg.°C. This object is placed suddenly in fluid at 50 °C. Estimate the convection heat transfer coefficient is 500 W/m².°C. Calculating temperature depth from the surface at 25 mm by this software to 240 sec having an error result 0.57 %. From the error result show that this finite resistance-capacitance model can be calculated by electrical theory which radial coordinate system use to solve problem on heat storage of a spherical particulate in packed bed.

Keywords: finite resistance-capacitance method, temperature response, inside sphere temperature

1. บทนำ

บทความนี้นำเสนอการคำนวณผลการตอบสนอง อุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาด้วยวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์[5,7] ในเนื้อวัสดุทรงกลม ซึ่งการถ่ายเทความร้อนจากจุดหนึ่งในเนื้อวัสดุไปยังอีกจุดหนึ่งนั้นขึ้นอยู่กับสภาพการนำความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับค่าทางไฟฟ้าคือสภาพการนำไฟฟ้าของวัสดุเมื่อเทียบเคียงกับสัญลักษณ์อุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวต้านทานไฟฟ้าหรือรีซิสเตอร์นั่นเอง และจากความจริงที่ว่าวัสดุเมื่อได้รับพลังงานความร้อนเพิ่มขึ้นจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นและเมื่อสูญเสียความร้อนอุณหภูมิจะลดลง ซึ่งสามารถคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้โดยทราบค่าความร้อนจำเพาะหรือค่าความจุความร้อนของวัสดุนั้นๆ กรณีเทียบเคียงกับสัญลักษณ์และอุปกรณ์ทางไฟฟ้าก็จะเป็นตัวเก็บประจุไฟฟ้าหรือคาปาซิเตอร์นั่นเอง

ในการแก้ปัญหาการถ่ายความร้อนในสภาวะแปรเปลี่ยนที่มีเพียงขึ้นเดียวได้แสดงการคำนวณให้เห็นว่าวิธีการนี้สามารถนำไปใช้ได้[1] และเมื่อเพิ่มจำนวนขึ้นมากขึ้นให้เป็นวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์โดยนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณหาอุณหภูมิในผนัง[2]และทรงกระบอก[3]ที่เวลาผ่านไปจะให้ค่าที่ถูกต้องมากขึ้นเมื่อแบ่งจำนวนขึ้นที่มากขึ้น จากนี้ยังมีการใช้วงจรทางไฟฟ้าคำนวณร่วมกับวงจรทางความร้อนเพื่อศึกษาผลของความร้อนที่มีต่อชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ เนื่องจากการไหลของไฟฟ้ามีผลให้เกิดความร้อนในชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์และความร้อนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์มีผลต่อการไหลของกระแสไฟฟ้าเช่นกัน[7]

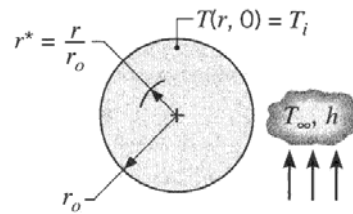


รูปที่ 1 วงจรไฟฟ้าด้านซ้ายเป็นวงจรไฟฟ้าของ DMOS ส่วนด้านขวาเป็นวงจรไฟฟ้าของ Heat sink [7]

สำหรับบทความนี้นำวิธีไฟไนต์รีซิสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์มาประยุกต์ใช้กับทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อไม่

เท่ากันที่ระดับความลึกจากผิวต่างๆกัน โดยการแบ่งเนื้อวัสดุในพิกัดทรงกลม(Spherical Coordinate) ออกเป็นทรงกลมกลวงเปลือกบางซ้อนกันเป็นจำนวนมาก สำหรับชั้นจุดศูนย์กลางเป็นทรงกลมตัน ซึ่งแต่ชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการคำนวณบริเวณผิววัสดุที่มีการพาความร้อนโดยของไหลจะใช้ตัวต้านทานการพาความร้อน 1 ตัว แล้วใช้โปรแกรมอิลคทรอนิกส์เวิร์คเบนด์คำนวณแบบจำลองนี้เปรียบเทียบกับผลทางทฤษฎีว่าอุณหภูมิที่ได้มีความผิดพลาดเพียงใด

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน



รูปที่ 2 เส้นไขการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกลมเมื่อเวลาผ่านไป หลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า[5] ในที่นี้จะกล่าวถึงการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในทรงกลมรัศมี r_0 ดังรูปที่ 2 จะได้ว่าอุณหภูมิที่ระดับความลึกเดียวกันจากผิวหน้ามีค่าเท่ากันตลอด

2.1 เงื่อนไขการคำนวณ

พิจารณาความเป็นไปได้เมื่ออุณหภูมิในทรงกลมจะมีค่าไม่เท่ากันหลังจากจุ่มลงในของไหลที่มีอุณหภูมิต่างจากผิวทรงกลมเมื่อเวลาผ่านไป เนื่องมาจากสาเหตุเหล่านี้คือ สภาพการนำความร้อนวัสดุมีค่าต่ำมาก, สัมประสิทธิ์การพาความร้อนผิววัสดุสูงมาก หรือทรงกลมมีขนาดใหญ่มาก ซึ่งความสัมพันธ์ของเงื่อนไข 3 ประการนี้ แสดงเป็นค่า Biot number (Bi) ถ้าผลการคำนวณค่า $Bi > 0.1$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าการกระจายอุณหภูมิมีความแตกต่างกัน $> 5\%$ [9] ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขบังคับให้ต้องคำนวณการกระจายอุณหภูมิภายในวัตถุ ถ้าต้องการคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนให้ถูกต้องยิ่งขึ้น

$$Bi = \frac{hr_0}{k} \quad (1)$$

เมื่อ h - สัมประสิทธิ์การพาความร้อน ($W/m^2 \cdot ^\circ C$)

r_0 - รัศมีทรงกลม (m)

k - สภาพการนำความร้อนวัสดุ ($W/m \cdot ^\circ C$)

2.2 อุณหภูมิวัตถุที่เวลาใดๆ

สมการที่ใช้หาค่าอุณหภูมิวัสดุที่เวลาใดๆเป็นดังนี้[5]

$$\frac{(T_{x,t} - T_\infty)}{(T_i - T_\infty)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \sin(\xi_n \frac{r}{r_0}) / (\xi_n \frac{r}{r_0}) \quad (2)$$

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\xi_n^2 Fo} \sin(\xi_n r^*) / (\xi_n r^*) \quad (3)$$

โดย

$$C_n = \frac{4[\sin(\xi_n) - \xi_n \cos(\xi_n)]}{2\xi_n - \sin(2\xi_n)} \quad (4)$$

$$1 - \xi_n \cot(\xi_n) = Bi \quad (5)$$

$$Fo = \frac{kt}{\rho C_p r_0^2} = \frac{\alpha t}{r_0^2} \quad (6)$$

เมื่อ $T_{x,t}$ - อุณหภูมิวัสดุที่ความลึกจากผิวหน้า x ณ เวลา t ($^\circ C$)

T_∞ - อุณหภูมิของไหล ($^\circ C$)

T_i - อุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุ ($^\circ C$)

t - เวลาที่ผ่านไป (s)

α - ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจายความร้อน (m^2/s)

ρ - ความหนาแน่นของวัสดุ (kg/m^3)

C_p - ความร้อนจำเพาะของวัสดุ ($J/kg \cdot ^\circ C$)

สำหรับการคำนวณโดยประมาณ(Approximate

solution) นั้น จะใช้ค่า $n=1$ เท่านั้น ซึ่งต้องตรวจสอบ Fourier number(Fo) ถ้าผลการคำนวณค่า $Fo > 0.2$ จะเป็นค่าที่ยอมรับว่าอุณหภูมิที่คำนวณได้ที่เวลาต่างๆมีความผิดพลาด $< 2\%$ [9] แต่ถ้าค่า $Fo < 0.2$ ต้องเพิ่มอันดับ n ให้มากขึ้น เช่น $n=1,2$ หรือ $n=1,2,3$ เป็นต้น

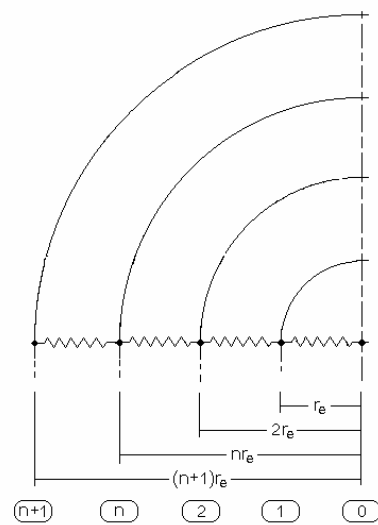
3. การวิเคราะห์แบบวิธีไฟไนต์ริจิสแทนซ์-กาปาจิแทนซ์

โดยการแบ่งเนื้อวัสดุออกเป็นชิ้นเล็กๆรูปทรงกลมตันเป็นแกนกลางแล้วซ้อนด้วยทรงกลมกลวงจำนวนมาก เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้รัศมีทรงกลมกลวงชั้นในสุดมีขนาด

เท่ากับรัศมีทรงกลมตัน r_e และให้ความหนาทรงกลมกลวงทุกชั้นมีขนาด r_e เท่ากันหมด ซึ่งแต่ละชั้นประกอบขึ้นด้วยตัวต้านทานการนำความร้อน 1 ตัว และตัวเก็บความร้อน 1 ตัว สำหรับการพาความร้อนจะเกิดขึ้นที่ผิวทรงกลมกลวงด้านนอกสุด

3.1 ตัวต้านทานการนำความร้อน

เนื่องจากการวิเคราะห์ถ่ายเทความร้อนแบบ 1 มิติ ในแนวรัศมี ค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 รูปแบบคือการนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกลมกลวง และ



การนำความร้อนในแนวรัศมีทรงกลมตัน ดังรูปที่ 3

รูปที่ 3 การถ่ายเทความร้อนในเนื้อวัสดุระหว่างแต่ละชั้น

3.1.1 ความต้านทานความร้อนในเนื้อแนวรัศมีทรงกลมกลวง

พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกลมแนวที่ $n+1$ และผิวทรงกลมแนวที่ n ในกรอบเส้นประ เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน ได้ค่าดังนี้[5]

$$R_{HSCond, inside radial} = \frac{(1/r_n - 1/r_{n+1})}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi k r_e n(n+1)} \quad (7)$$

เมื่อ $R_{HSCond, inside radial}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกลมกลวงในแนวรัศมี ($^\circ C/W$)

r_{n+1}, r_n - รัศมีด้านนอก และรัศมีด้านใน Element ชนิดทรงกลมกลวงที่ n

- n - หมายเลขทรงกลมกลวง รูปที่ 3
- k - สภาพการนำความร้อน (W/m.°C)

3.1.2 ความต้านทานความร้อนในเนื้อในแนวรัศมีทรงกลมตัน
พิจารณาการถ่ายเทความร้อนระหว่างผิวทรงกลมตันแนวรัศมี 1 และจุดศูนย์กลางทรงกลมตันแนวรัศมี 0 ของรูปที่ 3 เพื่อหาค่าความต้านทานความร้อน จะเห็นได้ว่าพื้นที่ผิวของจุดศูนย์กลางทรงกลมมีค่าเป็น 0 ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้สูตรการนำความร้อนของทรงกลมกลวงได้ ด้วยเหตุนี้จึงกำหนดให้อุณหภูมิที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมเท่ากับอุณหภูมิที่ผิวทรงกลมตันแนวรัศมี 1 นั่นคือความต้านทานความร้อนมีค่าเท่ากับศูนย์ จึงได้ค่าดังนี้

$$R_{SSCond,inside\ radial} = 0 \quad (8)$$

เมื่อ $R_{SSCond,inside\ radial}$ - ความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุของทรงกลมตันในแนวรัศมี(°C/W)

3.2 ตัวเก็บความร้อน

ตัวเก็บความร้อนมีค่าเท่ากับความจุความร้อนของวัสดุ ดังนี้ [1]

$$C_t = mC_p = \rho V C_p \quad (9)$$

เมื่อ C_t - ความจุความร้อน(J/°C)

m - มวลวัสดุ(kg)

V - ปริมาตร[m³]

ตัวเก็บความร้อนในเนื้อวัสดุมีได้ 2 แบบคือในเนื้อทรงกลมตัน และในเนื้อทรงกลมกลวง แต่เนื่องจากการคำนวณนี้แบ่งออกเป็น Node ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างทรงกลมกลวง ดังนั้นจึงแยกตัวเก็บความร้อนออกเป็น 3 ประเภทคือผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด, รอยต่อทรงกลมกลวงที่วางซ้อนกันและจุดศูนย์กลางกลางทรงกลมตัน

3.2.1 ตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด

แบ่งเนื้อจำนวนครั้งความหนาทรงกลมกลวงด้านนอกให้เป็นตัวเก็บความร้อนที่ผิวทรงกลมด้านนอกสุด โดยสมมติให้ชั้นนอกสุดเป็นชั้นที่ n จะได้

$$\begin{aligned} V_{HS,edge} &= (4/3) \pi (r_n^3 - r_{n-1/2}^3) \\ &= (4/3) \pi r_e^3 [(3/2)n^2 - (3/4)n + 1/8] \\ C_{HS,edge} &= \rho C_p (4/3) \pi r_e^3 [(3/2)n^2 - (3/4)n + 1/8] \quad (10) \end{aligned}$$

เมื่อ $C_{HS,edge}$ - ความจุความร้อนที่ผิวทรงกลมกลวงชั้นนอกสุด (J/°C)

3.2.2 ตัวเก็บความร้อนที่รอยต่อทรงกลม

บริเวณรอยต่อทรงกลม ใช้เนื้อทรงกลมกลวงด้านในของชั้นที่ n+1 จำนวนครั้งความหนา และใช้เนื้อทรงกลมด้านนอก

$$\begin{aligned} V_{HS,inside} &= (4/3) \pi (r_{n+1/2}^3 - r_{n-1/2}^3) \quad \text{ของชั้นที่ n จำนวน} \\ &= (4/3) \pi r_e^3 [3n+1/4] \quad \text{ครั้งความหนาจะได้} \end{aligned}$$

$$C_{HS,inside} = \rho C_p (4/3) \pi r_e^3 [3n+1/4]$$

(11)

เมื่อ $C_{HS,inside}$ - ความจุความร้อนที่รอยต่อทรงกลม(J/°C)

3.2.3 ตัวเก็บความร้อนที่จุดศูนย์กลางทรงกลมตัน

เนื่องจากได้แบ่งเนื้อที่ผิวทรงกลมตันแล้วไปครึ่งหนึ่งให้กับรอยต่อที่ n=1 ดังนั้นจึงเหลือเนื้อครึ่งเดียวของรัศมีทรงกลมตัน

$$V_{SS,cen} = (4/3) \pi \left[\frac{r_e}{2} \right]^3$$

$$C_{SS,cen} = \rho C_p (4/3) \pi r_e^3 [1/8] \quad (12)$$

เมื่อ $C_{SS,cen}$ - ความจุความร้อนที่แกนกลางทรงกลมตัน(J/°C)

3.3 ตัวต้านทานการพาความร้อน

ตัวต้านทานการพาความร้อนมีค่าดังนี้[5]

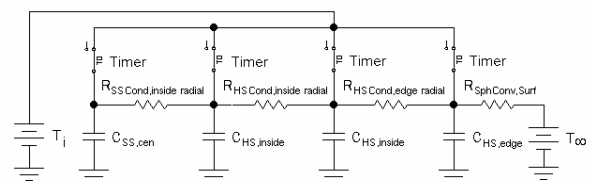
$$R_{Conv} = \frac{1}{h A_s} \quad (13)$$

เมื่อ R_{Conv} - ความต้านทานการพาความร้อน(°C/W)

$$R_{SphConv,Surf} = \frac{1}{h 4\pi r_o^2} \quad A_s - \text{พื้นที่ผิววัสดุที่สัมผัสกับของไหล (m}^2\text{)}$$

$$A_s = 4\pi r^2 \text{ m}^2$$

แทนค่า A_s ในสมการ



$$(14)$$

เมื่อ $R_{\text{SphConv,Surf}}$ – ความต้านทานการพาความร้อนที่ผิวทรงกลม ($^{\circ}\text{C}/\text{W}$)

รูปที่ 4 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนประกอบด้วยทรงกลมตันเป็นแกนกลางและทรงกลมกลวง 2 ชั้น อยู่ในของไหล

4. การคำนวณเปรียบเทียบ

เมื่อกำหนดให้อลูมิเนียมทรงกลมมีรัศมี (r_o) 50 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น (T_i) 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน (k) $237 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, ความหนาแน่น (ρ) 2702 kg/m^3 และความจุความร้อนจำเพาะ (C_p) $903 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ (T_{∞}) 50°C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h) $500 \text{ W/m}^2\text{.}^{\circ}\text{C}$

4.1 คำนวณด้วยทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน

ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. คำนวณค่า Biot number จาก(1)

$$r_o = 0.05 \text{ m}$$

$$Bi = 0.1054852320675$$

ค่า Bi มากกว่า 0.1 แสดงว่าอุณหภูมิที่กึ่งกลางเนื้อวัสดุแตกต่างจากบริเวณพื้นผิว

2. ตรวจสอบค่า Fourier number (Fo) จาก (6)

$$\alpha = 9.71348896228(10^{-5}) \text{ m}^2/\text{s}$$

$$Fo = 3.885395585(10^{-2})t$$

ดังนั้นจะสามารถคำนวณด้วย Approximate solution ($n=1$) ได้ เมื่อ $Fo > 0.2$ ที่ $t > 5.14748101254 \text{ s}$

3. คำนวณค่าคงที่ ξ จากสมการ Transcendental (5)

$$1 - \xi_n \cot(\xi_n) = 1 - \xi_n / \tan(\xi_n) = 0.1054852320675$$

คำตอบสมการนี้ได้หลายค่า ค่าที่น้อยที่สุดคือ $n=1$ หรือ

ξ_1 ค่ามากถัดไปเป็น $n=2$ หรือ ξ_2 ค่าโดยประมาณสำหรับการเริ่มต้น Trial&error ของ ξ ทั้ง 6 อันดับคือ 1,4,7,10,13,16

จากสมการ Trial&error จะได้

$$\xi_1 = 0.5566506 \quad ; \quad \xi_2 = 4.5168805$$

$$\xi_3 = 7.7389056 \quad ; \quad \xi_4 = 10.9137952$$

$$\xi_5 = 14.0736930 \quad ; \quad \xi_6 = 17.2268807$$

4. คำนวณค่าคงที่ C จาก(4)

$$C_1 = 1.0314419912 \quad ; \quad C_2 = -4.783544587(10^{-2})$$

$$C_3 = 2.748587461(10^{-2}); C_4 = -1.941073718(10^{-2})$$

$$C_5 = \text{error} \quad ; \quad C_6 = \text{error}$$

แสดงว่าใช้ค่า n ได้สูงสุดเพียง 4 อันดับเท่านั้น

5. หาสมการการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ตำแหน่งลึกจากผิวหน้า (x) 25 mm จาก(3)

$$r^* = 25/50 = 0.5$$

$$\begin{aligned} \theta^* = & 1.018154909 \text{Exp}(-0.0120392825t) \\ & - 1.636728482(10^{-2}) \text{Exp}(-0.7927065453t) \\ & - 4.725635947(10^{-3}) \text{Exp}(-2.326989055t) \\ & + 2.615966788(10^{-3}) \text{Exp}(-4.627930647t) \end{aligned}$$

6. คำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ ตารางที่ 1 อุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางรัศมีตามทฤษฎี

เวลา(s)	θ^*	อุณหภูมิ($^{\circ}\text{C}$)
160	0.148333357	72.25000361
240	0.056617581	58.49263715
320	0.021610450	53.24156738

4.2 คำนวณด้วยวิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์

สำหรับการคำนวณนี้ใช้โปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนท์คำนวณ แต่อย่างไรก็ตามสามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์ห้วงจรไฟฟ้าอื่นๆคำนวณได้ มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. แบ่งทรงกลมในแนวรัศมีออกเป็น 16 ระดับความลึกเท่าๆกัน จากผิวหน้าถึงจุดศูนย์กลางทรงกลม ได้แกนกลางทรงกลมตัน 1 ชั้นและทรงกลมกลวงซ้อนกันจำนวน 15 ชั้น

2. เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณกำหนดให้ความหนาเปลือกทรงกลมกลวงมีค่าเท่ากันหมดทุกชั้นย่อย และค่าความหนาเปลือกทรงกลมกลวงจะมีค่าเท่ากับรัศมีทรงกลมตันที่อยู่ชั้นในสุด ซึ่งคำนวณได้ค่ารัศมีทรงกลมตัน (r_o) $50/16=3.125 \text{ mm}$. การเพิ่มความหนาทรงกลมกลวงให้คงที่ตลอด ($r_i=r_1=r_o$) 3.125 mm . ทุกชั้น

3. คำนวณรัศมีผิวทรงกลมทุกๆชั้น จะได้

$$r_2 = r_1 + r_t = 2r_e = 6.25 \text{ mm.},$$

$$r_3 = r_1 + 2r_t = 3r_e = 9.375 \text{ mm.}, \dots,$$

$$r_{16} = r_1 + 15r_t = 16r_e = 50 \text{ mm.}$$

5. การคำนวณหาค่าความต้านทานความร้อนในเนื้อวัสดุ

ในแนวรัศมีของแต่ละชั้นย่อย จาก(8) $R_{SSCond0-1,inside radial} = 0$

$^{\circ}\text{C/W}$ จาก(7) เช่น $R_{HSCond1-2,inside radial} = 5.372318754(10^{-2})$

$^{\circ}\text{C/W}$, $R_{HSCond15-16,inside radial} = 4.476932295(10^{-4})$ $^{\circ}\text{C/W}$

6. คำนวณหาค่าความต้านทานการพาความร้อนจาก(14)

จะได้ $R_{SphConv,Surf} = 6.366197724(10^{-2})$ $^{\circ}\text{C/W}$

7. คำนวณค่าตัวเก็บประจุของแต่ละชั้นย่อยที่ได้แบ่งไว้

จาก(12) $C_{SS0,cen} = 3.898717632(10^{-2})$ $\text{J}/^{\circ}\text{C}$ จาก(11) เช่น

$C_{HS1,inside} = 1.013666584$ $\text{J}/^{\circ}\text{C}$, $C_{HS15,inside} = 210.6087265$

$\text{J}/^{\circ}\text{C}$ จาก(10) $C_{HS16,edge} = 116.0648239$ $\text{J}/^{\circ}\text{C}$

8. เขียนตัวต้านทานและตัวเก็บประจุลงใน Work sheet

ของโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนด์ จากรูปที่ 4 ในรูปได้ใส่

ตัว Timer switch 1 วินาทีไว้ เพื่อตั้งค่าสภาวะอุณหภูมิเริ่มต้น

(T_i) หลังจาก 1 วินาทีแล้วการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื้อวัสดุ

จะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิของไหล(T_{∞})

9. ใช้โปรแกรมคำนวณการเปลี่ยนแปลงค่าความต่างศักย์

ไฟฟ้า(V) โดยเลือกการวิเคราะห์แบบ Transient ซึ่งค่าที่ได้

คือการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ(T)เมื่อเวลาผ่านไปนั่นเอง โดย

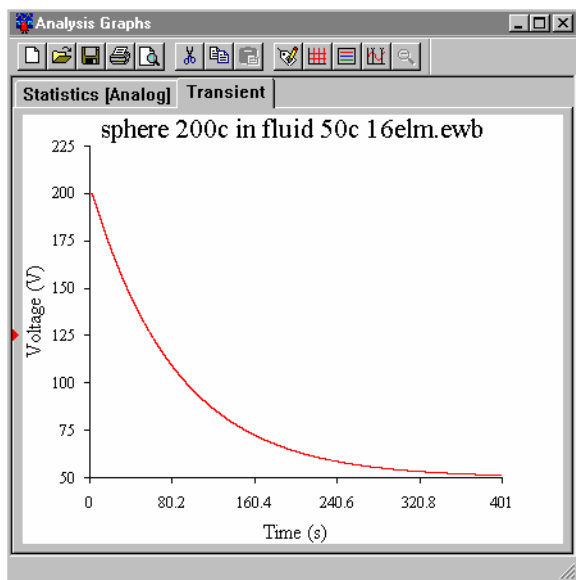
กำหนดจุดที่จะหาการเปลี่ยนแปลงอยู่ที่ความลึกจากผิวหน้า

25 mm คือที่รอยต่อระหว่างตัวต้านทานที่ 8 กับ 9 (n=8) ตั้ง

เวลาสิ้นสุดการวิเคราะห์ที่ถึงวินาทีที่ 401 ในระหว่างการ

คำนวณโปรแกรมจะเขียนกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลง

ศักย์ไฟฟ้า(V)หรืออุณหภูมิ(T) แสดงดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมอิเล็กทรอนิกส์เวิร์คเบนด์ จาก

เวลา 0 ถึง 401 วินาที

ซึ่งจะอ่านค่าอุณหภูมิจากกราฟได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 อุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm จากโปรแกรม

เวลา(s)	อุณหภูมิ($^{\circ}\text{C}$)
1+160	72.39819005
1+240	58.82352941
1+320	53.39366516

5. วิเคราะห์ผล

หาค่าความผิดพลาดที่แตกต่างจากทฤษฎี(%Error) โดย

นำตารางที่ 2 มาหาค่าแตกต่างจากตารางที่ 1 ได้ค่าความ

ผิดพลาดดังนี้

ตารางที่ 3 แสดงค่าความผิดพลาดของอุณหภูมิที่เวลาต่างๆ

เวลา(s)	Error(%)
160	0.205102322
240	0.565698997
320	0.285674870

จะเห็นได้ว่าเป็นค่าความผิดพลาดที่น้อยมาก สำหรับเวลา

ที่มากกว่า 401 s นั้น อุณหภูมิจะเข้าใกล้ T_{∞} มากยิ่งขึ้น

แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็

ไม่ได้ค่า Exact Value เป็นเพียงค่า Accept Value เท่านั้น

ถึงแม้ว่าจะเป็น Exact Solution ที่ได้จาก Analytical ก็ตาม

สาเหตุเนื่องจากไม่สามารถแก้ Differential Equation นี้ได้

โดยตรง จึงมีการใช้อनुกรมกำลัง[4]มาช่วยแก้สมการ ซึ่ง

ผลลัพธ์ที่ได้เป็นอนุกรมอันดับอนันต์ ดังนั้นจึงไม่สามารถแทน

ค่า n ลงในสมการ (3)(4)(5) ที่อันดับอนันต์ได้ เพราะจะมีค่า

มากถัดไปเสมอไม่สิ้นสุด(อนันต์) ค่าที่ได้จึงเป็นค่า

โดยประมาณที่ยอมรับได้เท่านั้น เป็นค่า Accept Value ที่

ยอมให้เกิดความผิดพลาดทศนิยมตำแหน่งที่เท่าใดเป็นต้นไป

แล้วแต่จะกำหนดอันดับสูงสุดของ n เช่น Approximate

Solution ใช้ n=1 เท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามบทความที่นำเสนอ

นี้ ใช้ n = 1,2,3,4 เพื่อเพิ่มความละเอียดของตัวเลขสำหรับไว้

ในการเปรียบเทียบ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าค่าที่ได้จากการ

คำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นเป็นค่าโดยประมาณที่ยอมรับได้เท่านั้น ถ้าต้องการความถูกต้องมากกว่านี้ต้องเพิ่มอันดับ $n \rightarrow \infty$

6. สรุป

เมื่อกำหนดให้ทรงกลมอลูมิเนียมมีรัศมี 50 mm. มีอุณหภูมิเริ่มต้น 200°C มีค่าสภาพการนำความร้อน $237 \text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$, ความหนาแน่น 2702 kg/m^3 และความจุความร้อนจำเพาะ $903 \text{ J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ ทำให้เย็นลงทันทีในของไหลอุณหภูมิ 50°C ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $500 \text{ W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$ เมื่อคำนวณอุณหภูมิที่ระยะลึกจากผิวหน้า 25 mm. ตรงจุดกึ่งกลางรัศมี ด้วยโปรแกรมโดยให้เวลาผ่านไป 240 วินาทีปรากฏว่ามีความผิดพลาด 0.57 % จากทฤษฎี แต่อย่างไรก็ตามสูตรที่ใช้ในการคำนวณทางทฤษฎีเองก็เป็นการประมาณการเท่านั้นเนื่องจากไม่สามารถแก้สมการ Differential ได้โดยตรง

จากค่าความผิดพลาดแสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ชิ้นส่วนทรงกลมที่มีตัวต้านทานและตัวเก็บประจุเป็นจำนวนมากนี้ สามารถคำนวณโดยทฤษฎีวงจรไฟฟ้าที่ให้คำตอบที่น่าเชื่อถือได้ ซึ่งจะเป็นการง่ายในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางไฟฟ้าคำนวณปัญหาการถ่ายเทความร้อนในสถานะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่มีความซับซ้อนของเนื้อวัสดุต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] ประเสริฐ อินประเสริฐ “การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิของวัตถุทรงกลมที่มีการกระจายอุณหภูมิในเนื้อสม่ำเสมอ ด้วยวิธีวิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์” วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม; เล่มที่ 10 ปีที่ 5 กรกฎาคม 2547-มิถุนายน 2548; หน้า 29-33
- [2] ประเสริฐ อินประเสริฐ; “การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในผนังด้วยวิธีไฟไนต์วิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์”; วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม; เล่มที่ 11 ปีที่ 6 กรกฎาคม 2548-ธันวาคม 2548; หน้า 5-10

[3] ประเสริฐ อินประเสริฐ; “การคำนวณผลการตอบสนองอุณหภูมิภายในทรงกระบอกด้วยวิธีไฟไนต์วิธีซีสแทนซ์-คาปาซิแทนซ์”; วารสารวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสยาม; เล่มที่ 13 ปีที่ 7 กรกฎาคม -ธันวาคม 2549; หน้า 47-51

[4] พิณิจ เพิ่มพงศ์พันธ์; “สมการเชิงอนุพันธ์”; พิมพ์ครั้งที่ 7; จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย; นำอักษรการพิมพ์; หน้า 326-330

[5] Frank P. Incropera; David P. DeWitt; 'Introduction to Heat Transfer'; 4nd; Purdue University; U.S.A.; John Wiley&Sons,Inc; 2002; pp 111,254-257,260-261

[6] Jan F. Kreider, Ari Rabi; New York; 'Heating and Cooling of Buildings'; University of Colorado at Boulder; U.S.A.; McGraw-Hill, inc; 1994; pp 370-381

[7] Martin Marz,Paul Nance; 'Thermal Modeling of Power-electronic Systems'; Fraunhofer Institute for IntegratedCircuit; 2000;

http://www.iisb.fraunhofer.de/de/arb_geb/pub_les/02_00.pdf

[8] Satish P. Ketkar; 'Numerical thermal analysis'; The MacNeal-Schwendler Corporation; U.S.A.; ASME Press; New York; 1999; pp 59-70

[9] Yunus A. Cengel; 'Heat Transfer a Practical Approach'; University of Nevada,Reno; U.S.A.; McGraw-Hill, Inc; 1998; pp 228-229,233-234