

การเปรียบเทียบผลเฉลยของสมการการแผ่รังสีความร้อนในวัสดุพรุนโดยวิธีสมการ
มาตรฐานทั่วไปกับผลเฉลยจากวิธีสมการโดยประมาณ P_1

Comparison of solution of radiative heat transfer equation in porous materials solving
by the equation of formal solution and the P_1 approximation equation

บัณฑิต กฤตาคม และ พิพัฒน์ อมตฉายา

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี นครราชสีมา 30000 โทรศัพท์ 044 233 073 โทรสาร 044 233 074

E-mail: pipat_24@hotmail.com

บทคัดย่อ

ในการศึกษาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการการแผ่รังสีความร้อนในวัสดุพรุนที่ทำหน้าที่เป็นตัวดูดซับและตัวแผ่รังสี ซึ่งใช้วิธีการหลักสองวิธี ประกอบด้วย วิธีการหาผลเฉลยแม่นยำตรงโดยสมการมาตรฐานทั่วไป และวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ ซึ่งเลือกใช้สมการการประมาณ P_1 ระบบที่ใช้ในการคำนวณจะพิจารณาหนึ่งมิติในระนาบเชิงขนานแบบวัตถุเทา และวัสดุพรุนมีคุณสมบัติในการดูดซับและแผ่รังสีความร้อน แต่ไม่พิจารณาคุณสมบัติการกระจายรังสีความร้อน ผลเฉลยสุดท้ายจากการคำนวณที่นำไปใช้งานคือ โครงสร้างอุณหภูมิของแข็ง (วัสดุพรุน) และแก๊ส (อากาศ) รวมถึงฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนของวัสดุพรุน โดยผลเฉลยที่ได้เหล่านี้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่นักวิจัยได้ทำการทดลองไว้แล้ว ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สอดคล้องเป็นอย่างดีกับผลการทดลอง นอกจากนี้ยังพบว่าผลเฉลยที่คำนวณได้จากทั้งสองวิธีแทบจะไม่มี ความแตกต่างกัน

Abstract

Two numerical methods for solving the radiative heat transfer equation in porous medium, which played an important role as an absorber and an emitter had been investigated. The first numerical method was the equation of formal solution, which provided exact solution. The other one was the P_1 equations, which was used to evaluate the approximate solutions. In the calculation, the medium was considered as a one dimensional gray medium in parallel plane. In addition, porous media was assumed to be able to emit and absorb thermal radiation. The scattering effect, however, was not taken into account in the calculation. The temperature profiles of solid and gaseous phase as well as the derivative of the net radiative heat flux of materials were finally obtained. The numerical results were compared with available experimental data. A comparison between the two numerical predictions and available temperature data, which was reported in the literature, showed very good agreement. Moreover, the solution calculated by using the equation of formal solution was found agreed very well with that calculated by using the P_1 approximations.

รายการสัญลักษณ์

- A_p : พื้นที่ผิวของวัสดุพูนต่อหนึ่งหน่วยอนุภาค, $m^2/particle$
 C_p : ค่าความร้อนจำเพาะ, $kJ/kg K$
 E_n : Exponential integral function
 G : รังสีที่แผ่ภายในวัสดุพูน, W/m^2
 h_p : สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนสองสถานะ, W/m^2K
 H : เทอมไร้หน่วยของฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน
 J : เทอมไร้หน่วยของรังสีตกกระทบจากภายนอกวัสดุพูน
 M_p : เทอมไร้หน่วยของสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนสองสถานะ
 n_p : จำนวนอนุภาคของวัสดุพูนต่อปริมาตร, $particle/m^3$
 N_R : เทอมไร้หน่วยของสัมประสิทธิ์การนำต่อการแผ่รังสีความร้อน
 Pr : Prandtl number
 q^R : ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน, W/m^2
 q^+, q^- : การแผ่รังสีความร้อนออกไปภายนอกวัสดุพูนที่ด้านขาเข้าและด้านขาออก, W/m^2
 Re : Reynolds number
 T : อุณหภูมิ, K
 T_{gas} : อุณหภูมิอากาศร้อนหรือเย็นที่ไหลเข้าสู่ระบบ, K
 T_o : อุณหภูมิบรรยากาศ, $298 K$
 u : ความเร็ว, m/s
 x : ระยะภายในวัสดุพูน, m
 x_o : ความหนาของวัสดุพูน, m
- ### สัญลักษณ์อักษรกรีก
- Δ : เทอมไร้หน่วยในสมการ (8)
 κ : สัมประสิทธิ์การดูดซับรังสีความร้อน, m^{-1}
 λ : ค่าการนำความร้อน, $W/m K$
 Γ : อัตราส่วนไร้หน่วยค่าการนำความร้อนของแข็งต่อแก๊ส
 μ : ค่าความหนืดสัมบูรณ์, $Pa s$
 θ : เทอมไร้หน่วยของอุณหภูมิ
 ρ : ความหนาแน่น, kg/m^3
 σ : Stefan-Boltzman constant, $5.6697 \times 10^{-8} W/m^2K$
 τ : ค่าความหนาเชิงแสง
 ξ : เทอมไร้หน่วยของระยะวัสดุพูน

ψ : เทอมไร้หน่วยของรังสีที่แผ่ภายในวัสดุพูน

ϕ : ค่าความพูน

สัญลักษณ์ตัวห้อย

b : วัตถุดำ (Black body)

d : ด้านขาออก (Downstream) ของวัสดุพูน

g : แก๊สหรืออากาศ

s : ของแข็งหรือวัสดุพูน

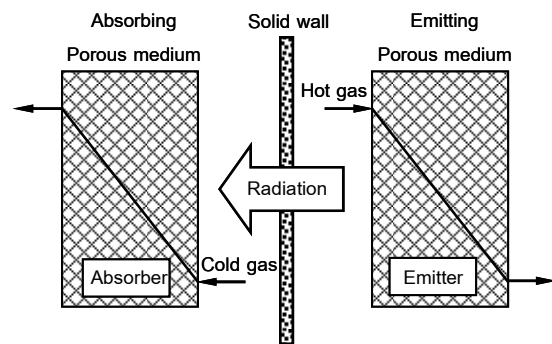
u : ด้านขาเข้า (Upstream) ของวัสดุพูน

1. บทนำ

การแก้ปัญหาสมการการแผ่รังสีความร้อนในสารตัวกลาง (Radiative transfer equation in participating media, RTE) มีความยุ่งยากและซับซ้อน เนื่องจาก สมการเป็นแบบ Integro-differential [1] ซึ่งในสมการมีทั้งการอินทิเกรตและอนุพันธ์ นอกจากนี้ยังมีห้าตัวแปรที่สำคัญ ได้แก่ 3 Space coordinates และ 2 direction coordinates โดยทั่วไปการหาคำเฉลยมีสองวิธีใหญ่ๆ คือ วิธีการหาคำเฉลยแบบแม่นยำตรง (Exact solution) ที่ใช้ระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการคำนวณ โดยเฉพาะการคำนวณด้วยวิธีผลเฉลยสมการมาตรฐานทั่วไป (Formal solution) ซึ่งวิธีนี้มีข้อเสียคือความยากในการใช้งานสมการ Exponential integral function ส่วนวิธีที่สองคือ การหาคำเฉลยแบบประมาณ (Approximation solution) [1, 2] โดยวิธีการคำนวณแบบ P_1 approximation ซึ่งเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้กันอย่างแพร่หลาย [3, 4] เพราะความสะดวกในการหาคำตอบที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับสองสมการเดียวเท่านั้น สำหรับตัวกลางที่พิจารณาในงานวิจัยนี้คือ วัสดุพูน (Porous medium) [5, 6] ซึ่งเป็นของแข็งที่มีความพูนและมีคุณสมบัติเด่น คือมีพื้นที่ผิวต่อปริมาตรสูง สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนและสัมประสิทธิ์การดูดกลืนรังสีความร้อน (Radiative absorption coefficient) สูง วัสดุพูนอาจทำมาจากเซรามิกส์ โลหะโครงข่ายเปิดทนความร้อนสูง (Open cellular metal) หรือลวดตาข่ายที่ถี่มากหลายแผ่นวางซ้อนและอัดแน่นเข้าด้วยกัน วัสดุพูนมีความสามารถในการเปลี่ยนพลังงานความร้อนระหว่างการพาและการแผ่รังสีความร้อนได้เป็นอย่างดีดัง

แสดงในรูปที่ 1 เมื่อวัสดุพอร์นด้านซ้ายมือได้รับรังสีความร้อนจากผนังทึบ (Solid wall) ทางด้านขวามือ ก็จะดูดกลืนรังสีความร้อนดังกล่าวไว้ ทำให้มีอุณหภูมิสูงขึ้น ดังนั้นเมื่อมีอากาศเย็น (Cold gas) ไหลผ่านวัสดุพอร์นดังกล่าว อากาศก็มีอุณหภูมิสูงขึ้นเพราะได้รับความร้อนโดยการพาความร้อนจากวัสดุพอร์นอุณหภูมิสูง เรียกว่าวัสดุพอร์นด้านซ้ายมือนี้ว่า Absorbing porous medium (AP) ในทางตรงกันข้ามเมื่อมีอากาศร้อนอุณหภูมิสูง (Hot gas) ไหลผ่านวัสดุพอร์นด้านขวามือ วัสดุพอร์นดังกล่าวจะได้รับความร้อนโดยการพาความร้อนแล้วเปลี่ยนเป็นการแผ่รังสีสวนทางกับการไหลของอากาศร้อนนั้น เพื่อส่งให้กับวัสดุพอร์นด้านซ้ายมือผ่านผนังทึบที่แบ่งคั่นอยู่ เพื่อป้องกันไม่ให้อากาศร้อนและอากาศเย็นผสมกัน เรียกว่าวัสดุพอร์นด้านขวามือนี้ว่า Emitting porous medium (EP) จากข้อดีดังกล่าวส่งผลให้การศึกษาและหาผลเฉลยของสมการการแผ่รังสีความร้อนในวัสดุพอร์นมีการศึกษากันอย่างแพร่หลาย Viskanta et al. [7] ได้จัดรูปสมการมาตรฐานทั่วไป (formal solution) ในการหาค่าฟลักซ์ของการแผ่รังสีความร้อน (Radiative heat flux) ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย คือเปลี่ยนเทอม Exponential integral function ให้เป็นฟังก์ชันของความเข้มการแผ่รังสี (Intensities radiation) ที่บริเวณผิวหรือขอบเขตวัสดุพอร์น ซึ่งวัสดุพอร์นในงานวิจัยนี้มีคุณสมบัติเป็นแบบ Absorbing porous medium สำหรับกรณีนี้ที่วัสดุพอร์นทำมีคุณสมบัติเป็น Emitting porous medium นั้นมีงานวิจัยมากมาย K. Y. Wang และ C. L. Tien [8] ทำการวัดอุณหภูมิตกคร่อมที่เกิดขึ้นภายในวัสดุพอร์นเพื่อเป็นแนวทางในการเลือกขนาดความร้อน โดยสมการการแผ่รังสีความร้อน ทำการหาผลเฉลยโดยวิธี Two flux หรือ Schuster-Schwarzschild approximation นอกจากนี้ Kamiuto et al. [9] ได้ใช้ P_1 approximation ในการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดร่วมกันระหว่างการนำความร้อน (Conductive heat transfer) กับการแผ่รังสีความร้อน ผลเฉลยที่ได้มีความน่าเชื่อถือและสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี เมื่อเร็วๆ นี้ P.Khantikamol และ K. Kamiuto [10] ได้ทำการทดลองและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาเพิ่มเติมจากงาน

ของ K. Y. Wang และ C. L. Tien [8] และ R. Echigo [11] ซึ่ง P_1 approximation ถูกเลือกใช้ในการคำนวณ งานวิจัยนี้จะแสดงอิทธิพลของค่าความหนาเชิงแสง (Optical thickness, τ) และ Reynolds number (Re) ที่มีผลต่ออุณหภูมิตกคร่อมภายในวัสดุพอร์น และมีการคำนวณหาประสิทธิภาพของวัสดุพอร์นจากความสามารถการแผ่รังสีที่ด้านขาเข้า (Radiative Emitting at upstream) ของวัสดุพอร์น ทั้งนี้ยังมีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในงานประยุกต์อย่างอื่นอีกมากมายโดยเฉพาะกับงานการส่งเสริมการเผาไหม้โดยมีการหมุนเวียนความร้อน [7] ทั้งการเผาไหม้ด้วยเชื้อเพลิงแก๊สและเชื้อเพลิงเหลว [8]



รูปที่ 1 หลักการกายภาพของระบบ

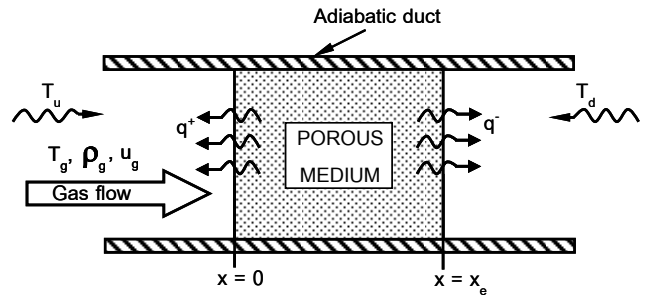
อย่างไรก็ตามงานวิจัยส่วนใหญ่ที่กล่าวมาข้างต้นก็ยังไม่มีการแสดงผลเฉลยโดยวิธีแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณของคุณสมบัติวัสดุพอร์น ในการทำหน้าที่เป็น Absorbing porous medium และ Emitting porous medium อย่างเด่นชัด ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงทำการคำนวณหาผลเฉลยทั้งสองวิธี เมื่อวัสดุพอร์นมีคุณสมบัติทั้งสองแบบ โดยทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แล้วหาผลเฉลยของสมการการแผ่รังสีความร้อน ด้วยวิธี Formal solution สำหรับผลเฉลยแม่นยำ และวิธี P_1 approximation สำหรับผลเฉลยโดยประมาณ ซึ่งผลเฉลยทั้งสองที่ได้จะนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองที่ผ่านมา [9, 10] เพื่อตรวจสอบผลการคำนวณ

2. หลักการและแบบจำลองทางกายภาพ

2.1 หลักการทางกายภาพ

จากหลักการที่ได้กล่าวเบื้องต้นเกี่ยวกับวัสดุพอร์น จะนำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีแผนภาพทางกายภาพ ดังรูปที่ 2 จะพิจารณาให้วัสดุพอร์นถูกบรรจุอยู่ในท่อ adiabatic โดยท่อนี้จะเปิดสู่ภายนอก อุณหภูมิภายนอกทางด้านขาเข้า (Upstream) และขาออก (Downstream) มีค่าเป็น T_u และ T_d ตามลำดับ ทำให้มีรังสีความร้อนแผ่ตกกระทบ (Incident radiation) เข้ามายังวัสดุพอร์นทั้งสองด้านตามอุณหภูมิภายนอกนั้น ขณะเดียวกันวัสดุพอร์นก็มีการแผ่รังสีออกไปภายนอกที่ตำแหน่งขอบเขตด้านขาเข้าและด้านขาออกคือ q^+ และ q^- ตามลำดับ อากาศที่ไหลเข้าสู่วัสดุพอร์นจะไหลด้วยด้วยอุณหภูมิ T_g , ความหนาแน่น ρ_g และ ความเร็ว u_g อย่างสม่ำเสมอตลอดหน้าตัดท่อ วัสดุพอร์นมีความหนา x_e ดังนั้นจากกายภาพของระบบจึงมีสมมติฐานหลัก ในการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. การคำนวณเป็นแบบระนาบขนานหนึ่งมิติ (One dimensional parallel plane) และวัสดุพอร์นเป็นแบบเทา (Gray medium)
2. การไหลของอากาศเป็นแบบหนึ่งมิติ ซึ่งไม่สามารถอัดตัวได้ (Incompressible) และความดันคงที่
3. ด้านขาเข้า (Upstream) และขาออก (Downstream) ได้รับการแผ่รังสีตกกระทบจากภายนอก (Incident radiation of boundary) แบบวัตถุดำ (Black body) มีค่าความเข้มการแผ่รังสีเท่ากับ $I_u = \sigma T_u^4 / \pi$ และ $I_d = \sigma T_d^4 / \pi$ ตามลำดับ
4. วัสดุพอร์นมีความสามารถในการดูดซับรังสีความร้อน (Absorbing radiation) และการแผ่รังสีความร้อน (Emitting radiation) แต่ไม่คิดการกระจายรังสีความร้อน (Scattering radiation)
5. ไม่คิดการแผ่รังสีความร้อนของอากาศ เนื่องจากมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับของแข็ง (วัสดุพอร์น)
6. คุณสมบัติทางกายภาพอื่นๆ มีค่าคงที่



รูปที่ 2 หลักการของวัสดุพอร์นเมื่อทำหน้าที่เป็นตัวดูดซับ (Emitter) และตัวแผ่รังสีความร้อน (Absorber)

2.2 สมการการคำนวณ

จากหลักการที่กล่าวในข้อ 2.1 สมการที่ใช้ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนในวัสดุพอร์นจะพิจารณาเป็น 2 สถานะ (Two phase) คือสถานะของแข็ง (วัสดุพอร์น) และสถานะแก๊ส (อากาศ) ดังนั้นสมการสมดุลทางพลังงานจึงแยกออกได้สองสมการตามสถานะของระบบ ดังนี้

$$\rho_g C_{pg} \frac{\partial T_g}{\partial t} + \rho_g C_{pg} u_g \frac{\partial T_g}{\partial x} = \lambda_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial x^2} - h_p n_p A_p (T_g - T_s) \quad (1)$$

$$\rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - \frac{\partial q^R}{\partial x} + h_p n_p A_p (T_g - T_s) \quad (2)$$

เมื่อสมการที่ (1) และ (2) คือสมการสมดุลพลังงานของแก๊สและของแข็งตามลำดับ โดยในเทอมสุดท้ายของทั้งสองสมการ คือ เทอมการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัสดุพอร์นกับแก๊ส (Interactive transfer term) สำหรับเทอมที่สองด้านขวามือของสมการสมดุลพลังงานของแก๊ส $\partial q^R / \partial x$ คืออนุพันธ์ของฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน (Derivative of net radiative heat flux) ในวัสดุพอร์น ซึ่งเป็นค่าที่งานวิจัยนี้จะทำการนำเสนอ โดยพิจารณาได้ตามวิธี Formal solution และวิธี P_1 approximation ดังสมการตามลำดับต่อไปนี้

$$\frac{\partial q^R}{\partial x} = -2\pi k \left[I_u E_2(\tau) + I_d E_2(\tau_e - \tau) - 2I_b(\tau) + \int_0^{\tau_e} I_b(\tau') E_1(|\tau - \tau'|) d\tau' \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial q^R}{\partial x} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 4k \left(\sigma T_s^4 - \frac{G}{4} \right) \quad (4)$$

เมื่อ

$$\left. \begin{aligned} E_n(\tau) &= \int_0^1 \mu^{n-2} \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) d\mu \\ I_b(\tau) &= \sigma T_s^4(\tau) / \pi \end{aligned} \right\} (5)$$

การคำนวณงานวิจัยนี้ได้พิจารณาแบ่งออกเป็นสองกรณีตามคุณสมบัติของวัสดุพอรุส ดังนั้นขอบเขตของการคำนวณ (Boundary condition) จึงแบ่งออกได้สองกรณีอ้างอิงกับผลการทดลองที่จะนำไปเปรียบเทียบ แบ่งได้คือ

กรณี Absorbing porous medium

$$\left. \begin{aligned} x=0 : T_g &= T_{gas}, \frac{\partial T_s}{\partial x} = \text{constant} \text{ และ } I_u = \frac{\sigma T_u^4}{\pi} \\ x=x_e : \frac{\partial T_g}{\partial x} &= \frac{\partial T_s}{\partial x} = \text{constant} \text{ และ } I_d = \frac{\sigma T_d^4}{\pi} \end{aligned} \right\} (6)$$

กรณี Emitting porous medium

ในกรณีนี้อ้างอิงจากผลการทดลอง [10] ซึ่งช่วงระยะระหว่าง $x=0 < x/x_e < 0.8$ จะเป็นช่วงที่อากาศไหลเข้าสู่ท่อ adiabatic โดยไม่มีวัสดุพอรุสซึ่งในการคำนวณจะไม่นับคำนวณช่วงนี้แต่จะพิจารณาเฉพาะช่วงที่มีวัสดุพอรุสเท่านั้นจึงได้ขอบเขตการคำนวณ คือ

$$\left. \begin{aligned} x=0.8 \frac{x}{x_e} : T_g &= T_{gas}, \frac{\partial T_s}{\partial x} = \text{constant} \text{ และ } I_u = \frac{\sigma T_u^4}{\pi} \\ x=x_e : \frac{\partial T_g}{\partial x} &= \frac{\partial T_s}{\partial x} = \text{constant} \text{ และ } I_d = \frac{\sigma T_d^4}{\pi} \end{aligned} \right\} (7)$$

2.3 การประมวลผล

จากสมการต่างๆที่เกี่ยวข้องพร้อมทั้งขอบเขตการคำนวณ จะทำการเปลี่ยนสมการต่างๆ เหล่านี้ให้อยู่ในรูปสมการไร้มิติ (dimensionless equations) โดยกลุ่มตัวแปรไร้มิติที่นำมาใช้ในการคำนวณ คือ

$$\left. \begin{aligned} \theta_g &= T_g/T_0, \theta_s = T_s/T_0, \xi = X/X_e, T = u_g t/X_e, \tau = \kappa X, \\ Re &= \rho_g u_g X_e / \mu_g, Pr = \mu_g C_{pg} / \lambda_g, \Gamma = \lambda_s / \lambda_g, \\ M_p &= x_e^2 h_p n_p A_p / \lambda_g, H = q^R / 4\sigma T_0^4, \psi = G / \sigma T_0^4, \\ \Delta &= \rho_s C_{ps} / \rho_g C_{pg}, N_R = \kappa \lambda_g / 4\sigma T_0^3, \\ J_u &= I_u \pi / 4\sigma T_0^4, J_d = I_d \pi / \sigma T_0^4 \end{aligned} \right\} (8)$$

หลังจากได้สมการไร้มิติเรียบร้อยแล้ว จะทำการหาผลเฉลยโดยแบ่งช่วงการคำนวณออกเป็น 150 ช่วง ที่เท่าๆกัน และใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ Implicit finite difference method โดยเทอมอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะใช้แบบย้อนกลับ (Backward difference formulas) ในขณะที่เทอมอนุพันธ์อันดับสองใช้แบบศูนย์กลาง (Central difference formulas) และเทอมอินทิเกรตของ Exponential integral function จะใช้ระเบียบวิธีแบบสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule) แบ่ง 150 ช่วง ขั้นตอนการคำนวณหาผลเฉลยของอุณหภูมิแก๊ส θ_g , อุณหภูมิวัสดุพอรุส θ_s , การแผ่รังสีภายในวัสดุพอรุส ψ และฟลักซ์การแผ่รังสี H จะเริ่มต้นที่สมมติค่าโครงสร้างอุณหภูมิทั้งสองสถานะภายในวัสดุพอรุส จะทำให้ได้ค่า ψ และ H ออกมา หลังจากนั้นนำไปคำนวณต่อในสมการสมดุลพลังงานทั้งสองที่จัดอยู่ในรูประบบสมการของเมทริกซ์ ซึ่งจะคำนวณหาผลเฉลยระบบสมการนี้ โดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination) จะได้อุณหภูมิทั้งสองสถานะออกมา แล้วเอาค่าที่ได้ย้อนกลับทำการคำนวณหา ψ และ H อีกครั้ง และนำมาหาค่าอุณหภูมิอีกครั้งตามลำดับทำการคำนวณเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าโครงสร้างอุณหภูมิทั้งสองสถานะที่คำนวณมาได้ครั้งล่าสุดจะมีความแตกต่างจากค่าก่อนหน้านี้น้อยกว่าที่ค่าความคลาดเคลื่อน 10^{-6}

3. ผลการคำนวณและการอภิปรายผล

3.1 โครงสร้างอุณหภูมิแก๊สและของแข็ง

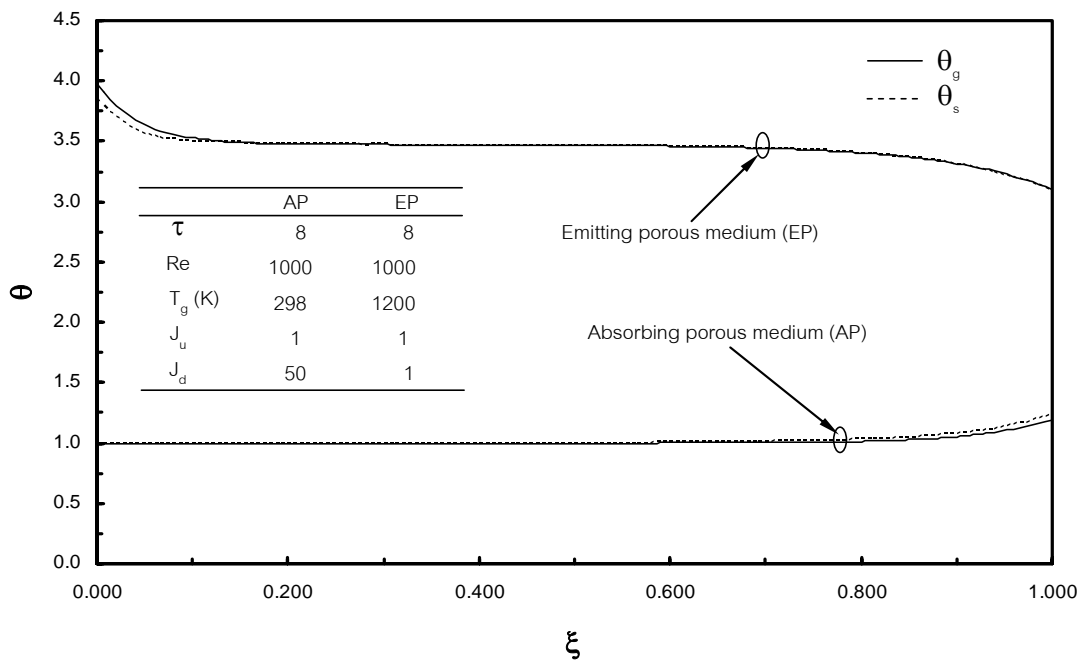
รูปที่ 3 แสดงการเปรียบเทียบระหว่างโครงสร้างอุณหภูมิของแข็งและแก๊สที่ได้จากทั้งกรณี Absorbing porous medium (AP) และ Emitting porous medium (EP) จะพบว่าทั้งสองกรณีโครงสร้างอุณหภูมิของแข็งกับแก๊สมีค่าใกล้เคียงกันมาก เนื่องจากในการคำนวณนี้ได้กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนระหว่างสองสถานะ (h_p) มีค่าสูง เมื่อพิจารณาในกรณี EP นั้น อธิบายได้ว่าวัสดุพอรุสสามารถดูดซับพลังงานของอากาศร้อนได้อย่างเต็มที่ เท่าที่อากาศมีพลังงานสะสมอยู่ และแผ่รังสีความร้อนหรือพลังงานออกมาเท่ากับที่ดูดซับไป จนเมื่อระบบอยู่ในสภาวะเสถียรของการถ่ายเทความร้อน (Thermal equilibrium) จะทำให้

โครงสร้างอุณหภูมิใกล้เคียงกัน แต่อย่างไรก็ตามที่บริเวณขาเข้าของวัสดุพอรุน อุณหภูมิของอากาศจะสูงกว่าวัสดุพอรุนเล็กน้อย ซึ่งลักษณะเช่นนี้เป็นข้อเท็จจริงเพราะในช่วงดังกล่าวอากาศไหลเข้ามาเป็นอากาศร้อนจะมีอุณหภูมิสูงกว่า ซึ่งวัสดุพอรุนทำหน้าที่เป็นตัวรับพลังงานนี้ ก่อนที่จะทำการแผ่รังสีความร้อนต่อไปเมื่อระบบอยู่ในสภาวะเสถียร จึงเป็นเหตุให้อุณหภูมิของอากาศสูงกว่าในบริเวณดังกล่าว ในทำนองเดียวกันกรณี AP อากาศเย็นจะได้รับพลังงานมาจากวัสดุพอรุนที่สะสมความร้อนไว้เต็มที่ เท่ากับพลังงานที่วัสดุพอรุนแผ่รังสีความร้อนออกมา ส่งผลให้โครงสร้างอุณหภูมิมียค่าใกล้เคียงกันตามไปด้วย สำหรับอุณหภูมิของวัสดุพอรุนที่บริเวณขาออกจากระบบมีค่าสูงกว่าอากาศ ก็อธิบายได้ด้วยเหตุผลย้อนกลับกรณี EP นั้น คือเมื่ออากาศเย็นไหลเข้ามายังวัสดุพอรุนร้อนที่ได้รับพลังงานจากด้านขาออก อากาศจะทำหน้าที่เป็นตัวรับพลังงานนี้ จึงย่อมมีค่าต่ำกว่าเล็กน้อยตามพฤติกรรมแท้จริงของการถ่ายเทความร้อน ดังนั้นเมื่ออุณหภูมิทั้งสองมีค่า

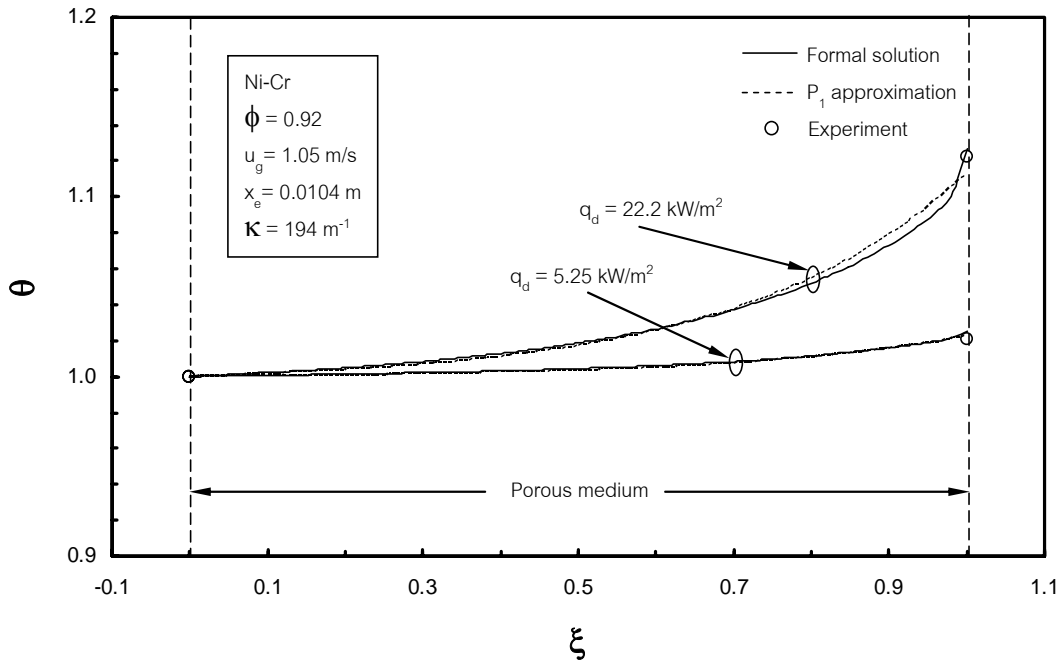
ใกล้เคียงกันในงานวิจัยนี้ จึงขอนำเสนอเฉพาะโครงสร้างอุณหภูมิของอากาศเท่านั้น

3.2 ผลการคำนวณกรณี absorbing porous medium

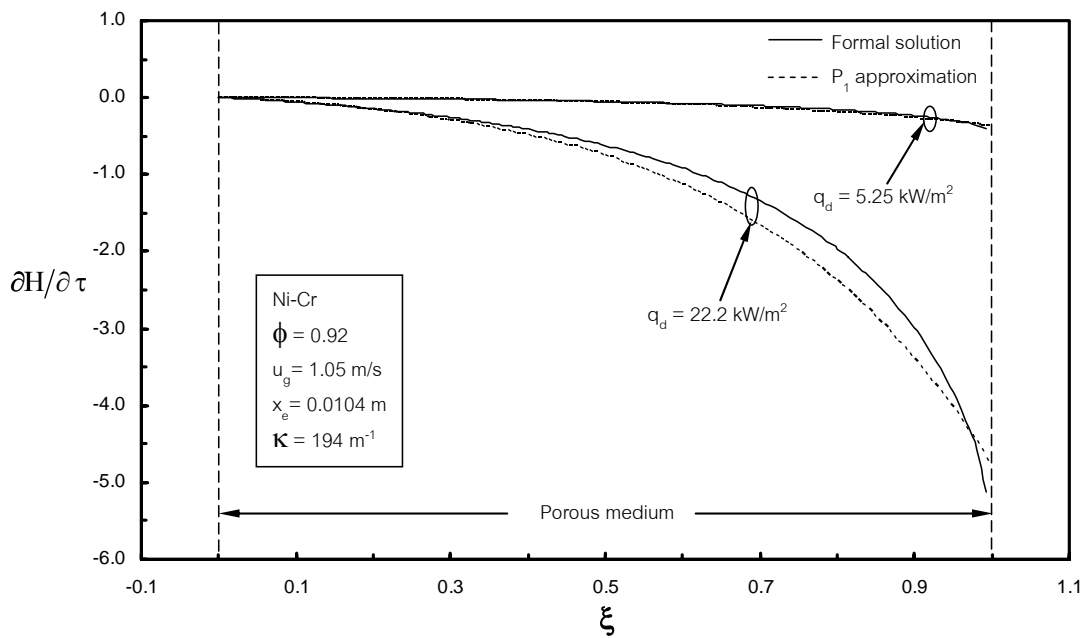
รูปที่ 4 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลอง [9] จะพบว่าผลการคำนวณทั้งสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกับการทดลองเป็นอย่างดีทั้งสองค่าพลังงานการแผ่รังสีจากภายนอกที่ส่งมายังขาออกของวัสดุพอรุน อากาศจะได้รับ การถ่ายเทพลังงานจากวัสดุพอรุนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามโครงสร้างอุณหภูมิที่เกิดขึ้น จนมีค่าเท่ากับที่ได้รับมาจากภายนอก หากเปรียบเทียบวิธีการคำนวณทั้งสองวิธีแล้วนั้น ก็พบว่าโดยทั่วไปโครงสร้างอุณหภูมิตลอดวัสดุพอรุนของวิธี Formal solution จะสูงกว่าวิธี P_1 approximation เล็กน้อย เนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าการคำนวณด้วยวิธี P_1 approximation จะตัดเทอมอนุพันธ์สูงสุดในลำดับสมการชุดที่สองออกไป ดังที่ Ozisik [1] ได้อธิบายอย่างละเอียดไว้ใน



รูปที่ 3 การเปรียบเทียบโครงสร้างทางอุณหภูมิระหว่างของแข็ง (วัสดุพอรุน) กับแก๊ส (อากาศ)



รูปที่ 4 การเปรียบเทียบผลการคำนวณโครงสร้างทางอุณหภูมิของอากาศด้วยวิธีผลเฉลยแม่นยำ โดยสมการมาตรฐานทั่วไป และวิธีผลเฉลยโดยประมาณแบบสมการ P_1 กับผลการทดลอง ในกรณีวัสดุพอรุสทำหน้าที่เป็นตัวดูดซับรังสีความร้อน (Absorbing porous medium)



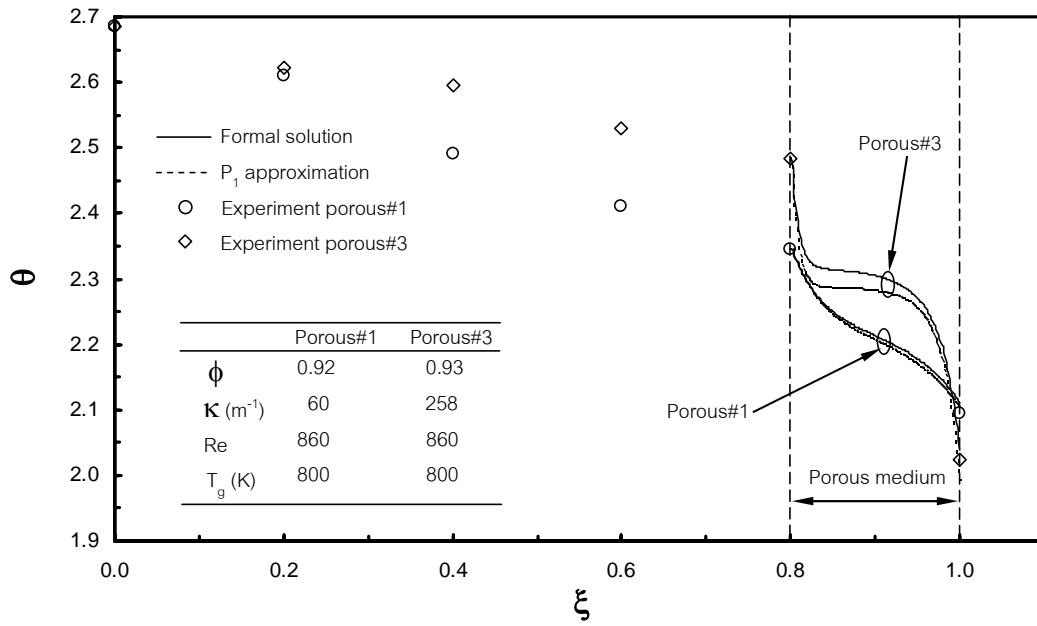
รูปที่ 5 การเปรียบเทียบผลการคำนวณค่าอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน (Derivative of the net radiative heat flux) ด้วยวิธีผลเฉลยแม่นยำโดยสมการมาตรฐานทั่วไป และวิธีผลเฉลยโดยประมาณแบบสมการ P_1 กับผลการทดลอง ในกรณีวัสดุพอรุสทำหน้าที่เป็นตัวดูดซับรังสีความร้อน (Absorbing porous medium)

การหาผลเฉลยโดยประมาณด้วยวิธี Spherical harmonics ถึงกระนั้นก็ตาม ในกรณี $q_0 = 22.2 \text{ kW/m}^2$ ที่ตำแหน่ง $\xi > 0.7$ โครงสร้างอุณหภูมิของวิธี P_1 approximation จะมีค่าสูงกว่า พฤติกรรมเช่นนี้อาจอธิบายได้ เนื่องจากผลของ Exponential integral function ที่ปรากฏอยู่ในการหาผลเฉลยวิธี Formal solution นั้นเอง ซึ่งตามผลของโครงสร้างอุณหภูมิวิธี Formal solution ที่สูงกว่านี้ สามารถยืนยันหรือบ่งบอกได้ด้วยค่าอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน (Derivative of the net radiative heat flux) ดังแสดงในรูปที่ 5 ซึ่ง ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนของวิธี Formal solution จะสูงกว่าอย่างเด่นชัด และจะพบว่า ที่บริเวณด้านขาออกของวัสดุพอรูนที่ได้รับพลังงานจากภายนอกนั้น จะมีการส่งถ่ายฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนสูงตามพลังงานที่รับมาด้วย นอกจากนี้หากเปรียบเทียบอิทธิพลการแผ่รังสีความร้อนจากภายนอกมายังขาออกของวัสดุพอรูน พบว่าเมื่อมีค่าการแผ่รังสีจากภายนอกเพิ่มขึ้นจาก $q_0 = 5.25 \text{ kW/m}^2$ เป็น 22.2 kW/m^2 จะมีฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนเพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นความจริงเพราะวัสดุพอรูนได้รับพลังงานมากขึ้น สำหรับอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนที่มีค่าเป็นลบนั้น หมายความว่าวัสดุพอรูนสูญเสียการแผ่รังสีความร้อนออกไปให้กับอากาศภายในระบบ

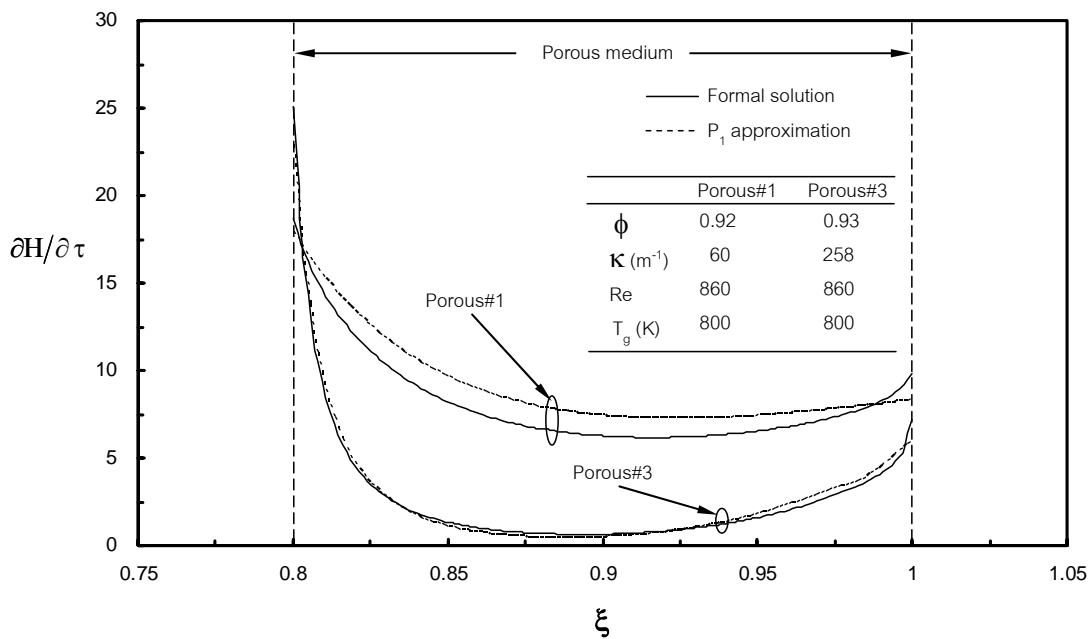
3.3 ผลการคำนวณกรณี emitting porous medium

รูปที่ 6 แสดงการเปรียบเทียบผลการคำนวณกับการทดลอง [10] โดยช่วงระหว่าง $0 < \xi < 0.8$ จะไม่มีวัสดุพอรูนเป็นช่องว่าง แต่อยู่ในท่อ adiabatic ซึ่งมีอากาศร้อนไหลผ่านจนมาถึงตำแหน่ง $\xi = 0.8$ จึงไหลเข้าสู่วัสดุพอรูน จะพบว่าผลการคำนวณทั้งสองวิธีให้ผลที่สอดคล้องกับการทดลองเป็นอย่างดีทั้งสองชนิดของวัสดุพอรูน และหากเปรียบเทียบผลเฉลยทั้งสองวิธีพบว่าโครงสร้างอุณหภูมิของวิธี Formal solution จะสูงกว่าวิธี P_1 approximation ดังเหตุผลที่ได้อธิบายไว้แล้วในกรณี AP พฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนของสองสถานะนั้นจะอธิบายได้ว่าเมื่ออากาศร้อนไหลเข้าสู่ท่อ adiabatic อุณหภูมิของอากาศร้อนจะลดลงตามพฤติกรรมของ Boundary layer จนมาถึงวัสดุพอรูนอุณหภูมิจะลดลง

อย่างรวดเร็ว เพื่อทำการถ่ายเทพลังงานให้กับวัสดุพอรูน จนระบบอยู่ในสภาวะเสถียรทำให้โครงสร้างอุณหภูมิ บริเวณกึ่งกลางมีความลาดเอียงน้อย และจะมีความลาดชันสูงมากหรือลดต่ำลงอย่างรวดเร็วบริเวณด้านขาออกอีกครั้ง เพราะบริเวณนี้จะมีการถ่ายเทความร้อนให้กับภายนอกด้วย เพื่อรักษาเสถียรภาพของระบบ ซึ่งจะเห็นได้จากอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน (Derivative of the net radiative heat flux) ที่บริเวณด้านขาเข้าและขาออกมีความสูงชันมาก ดังแสดงในรูปที่ 7 และที่ค่าอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อนที่มีค่าเป็นบวกนั้น หมายความว่าวัสดุพอรูนได้รับหรือดูดซับการแผ่รังสีความร้อนมาจากอากาศภายในระบบ นอกจากนี้หากพิจารณาอิทธิพลชนิดของวัสดุพอรูนจะพบว่า วัสดุพอรูน#1 จะมีความชันของโครงสร้างอุณหภูมิด้านขาออกและขาเข้า น้อยกว่าวัสดุพอรูน#3 เนื่องจากอิทธิพลของค่าสัมประสิทธิ์การดูดซับการแผ่รังสี (Absorption coefficient, K) หากวัสดุพอรูนใดมีค่าสัมประสิทธิ์นี้สูงจะมีความสามารถในการดูดซับพลังงานได้ดีตามไปด้วย ซึ่งวัสดุพอรูน#3 มีค่าสูงกว่ามีค่าเท่ากับ 285 m^{-1} แต่วัสดุพอรูน#1 มีค่าเท่ากับ 60 m^{-1} และด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่สูงกว่านี้เองทำให้อากาศร้อนที่ไหลเข้ามาในวัสดุพอรูน#3 ถูกถ่ายเทไป ได้มากกว่าวัสดุพอรูน#1 ทำให้โครงสร้างอุณหภูมิต่ำลง ในลักษณะคล้ายๆ กัน โครงสร้างอุณหภูมิด้านขาออกของวัสดุพอรูน#3 มีค่าต่ำกว่าวัสดุพอรูน#1 เพราะวัสดุพอรูนมีความสามารถในการดูดซับพลังงานได้ดีกว่า จนทำให้อุณหภูมิลดต่ำลงกว่า ก่อนออกจากระบบนั่นเอง ขณะเดียวกันสำหรับวัสดุพอรูน#3 เมื่อได้รับพลังงานมามากก็ จะแผ่รังสีความร้อนออกไปมาก ตามคุณสมบัติของวัสดุพอรูน ซึ่งขณะนี้ทำหน้าที่เป็น EP ดังนั้นอุณหภูมิจากอากาศร้อนที่ไหลเข้ามา จึงได้รับการแผ่รังสีความร้อนนี้มาชดเชยและเพิ่มขึ้น ส่งผลให้วัสดุพอรูน#3 มีอุณหภูมิต่างขาเข้าที่สูงกว่าวัสดุพอรูน#1



รูปที่ 6 การเปรียบเทียบผลการคำนวณโครงสร้างทางอุณหภูมิของอากาศด้วยวิธีผลเฉลยแม่นยำตรงโดยสมการมาตรฐานทั่วไป และวิธีผลเฉลยโดยประมาณแบบสมการ P_1 กับผลการทดลอง ในกรณีวัสดุพอรุนทำหน้าที่เป็นตัวแผ่รังสีความร้อน (Emitting porous medium)



รูปที่ 7 การเปรียบเทียบผลการคำนวณค่าอนุพันธ์ฟลักซ์การแผ่รังสีความร้อน (Derivative of the net radiative heat flux) ด้วยวิธีผลเฉลยแม่นยำตรงโดยสมการมาตรฐานทั่วไป และวิธีผลเฉลยโดยประมาณแบบสมการ P_1 กับผลการทดลอง ในกรณีวัสดุพอรุนทำหน้าที่เป็นตัวแผ่รังสีความร้อน (Emitting porous medium)

4. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ผลการคำนวณหาผลเฉลยของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสองวิธี ในวัสดุพอร์นที่ทำหน้าเป็นทั้งตัวดูดซับและตัวแผ่รังสีความร้อน (Absorbing and emitting porous medium) นั้น สามารถสรุปผลที่สำคัญได้ดังนี้

4.1 วัสดุพอร์นที่ทำหน้าที่เป็นตัวดูดซับรังสีความร้อน การถ่ายเทความร้อนระหว่างสองสถานะ จะมีค่าสูงที่บริเวณด้านที่รับพลังงานจากภายนอก และจะมีค่าลดลงไปตามระยะทางที่ห่างออกไปจากบริเวณดังกล่าว ดังโครงสร้างอุณหภูมิลดลงไป ซึ่งมีความสอดคล้องกับพลั๊กซ์การแผ่รังสีความร้อนจะมีค่าลดลงตามไปด้วย และแสดงค่าเป็นลบ เพราะวัสดุพอร์นมีการสูญเสียพลังงาน ให้กับอากาศภายในระบบ

4.2 วัสดุพอร์นที่ทำหน้าที่เป็นตัวแผ่รังสีความร้อน การถ่ายเทความร้อนระหว่างสองสถานะจะมีค่าสูง ที่บริเวณด้านขาเข้าและขาออกของระบบ เนื่องจากระบบได้มีการถ่ายเทพลังงานบริเวณดังกล่าวเพื่อรักษาเสถียรของระบบ ดังโครงสร้างอุณหภูมิลดลงตามระดับความลาดชัน บริเวณขอบของวัสดุพอร์น และมีความสอดคล้องกับพลั๊กซ์การแผ่รังสีความร้อนที่มีค่าสูงชันบริเวณดังกล่าว และมีค่าค่อนข้างคงที่บริเวณกึ่งกลางสำหรับค่าพลั๊กซ์ที่เป็นบวก เพราะวัสดุพอร์นได้รับพลังงานจากอากาศภายในระบบ

4.3 การหาผลเฉลยด้วยวิธีสมการมาตรฐานทั่วไป กับวิธีสมการโดยประมาณ P_1 จะให้ผลที่สอดคล้องเป็นอย่างดีกับการทดลองของงานวิจัยที่ผ่านมา และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบถึงวิธีการหาผลเฉลยทั้งสองแบบ ยังพบว่าผลเฉลยวิธีสมการมาตรฐานทั่วไป จะมีค่าโครงสร้างทางอุณหภูมิลดลงและพลั๊กซ์การแผ่รังสีความร้อนที่สูงกว่าเล็กน้อย แต่อย่างไรก็ตามค่าความแตกต่างนี้ก็น้อยมากเป็นที่ยอมรับได้และเลือกใช้งานได้ดีทั้งสองแบบ

เอกสารอ้างอิง

1. Ozisik, M.N., Radiative Transfer and interactions with conduction and convection, New York: John Wiley & Sons, 1973
2. Modest M.F., Radiative Heat Transfer, 2nd ed. London: Academic Press, 2003.
3. Sathe, S. B., Peck, R. E., and Tong, T. W., "Flame stabilization and multimode heat transfer in inert porous media: A numerical study". Combust. Sci and Tech., 77: p. 93 – 109, 1990.
4. Henneke, M. R. and Ellzey, J. L., "Modeling of filtration in a packed bed". Combustion and Flame, 117: p. 832 – 840, 1999.
5. Vafai, K., Handbook of Porous Media, Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000.
6. สำเร็จ จักรใจ, "การเผาไหม้" พิมพ์ครั้งที่ 1 กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, พ.ศ. 2547
7. Viskanta, R., S. Maruyama, and T. Aihara, "Analysis of an active high-temperature thermal insulation system". Int. J. Heat and Fluid Flow, 11(3): p. 196-203, 1990.
8. Wang, K. Y. and Tien, C. L., "Thermal insulation in flow system: combined radiative and convection through a porous segment". ASME Journal of Heat Transfer, 106: p. 453-459, 1984.
9. Kamiuto, K., M. Iwamoto, and Y. "Nagumo, Combined conduction and correlated-radiation heat transfer in packed bed", J. Thermophysics Heat Transfer, 7(3): p. 496-501, 1993.
10. Khantikomol, P. and Kamiuto, K. " Combined forced-convection and radiation heat transfer in an open-cellular porous", in 45th National Heat Transfer Symposium of Japan, Tsukuba. Japan, 2008.

11. Echigo, R. "Effective energy conversion method between gas enthalpy and thermal radiation and application to industrial furnaces", in 7th Int. Heat Transfer Conf., Munich. German, 1982.
12. Weinberg, F., "Heat-recirculating burners: Principles and some recent developments", *Combust Sci Tech*, 121: p. 3-22, 1996.
13. Howell, J.R., M.J. Hall, and J.L. Ellzey, Combustion of hydrocarbon fuels within porous inert media. *Prog Energy Combust Sci*, 22: p. 121-145, 1996.
14. Kamiuto, K., K. Unoki, and J. Andou, "Thermal characteristics of transpiration cooling system using open-cellular porous materials in radiative environment". *Int. J. Trans. Phenomena*, 7: p. 85-96, 2005.