

# การประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ด้วยวิธีการแบ่งส่วน

## Estimating Probability Statistics in Transition Matrix of Large Scales Markov Chain by Decomposition Method

วนิดา เลิศพิพัฒน์นนท์\* และ พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (บางเขน)

เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

E-mail: waniler@hotmail.com\*

### บทคัดย่อ

การประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาดใหญ่ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ซึ่งก็คือการหาผลลัพธ์ของปัญหากำหนดการกำลังสองที่สามารถใช้ฟังก์ชัน quadprog ในกล่องเครื่องมือของโปรแกรม MATLAB ในการหาผลลัพธ์ได้ แต่จะต้องใช้เวลาในการประมาณค่าค่อนข้างมาก ในการวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาถึงวิธีการหาผลลัพธ์ของปัญหาดังกล่าวข้างต้นด้วยวิธีการแบ่งส่วน (Decomposition method) โดยมีสมมติฐานของการวิจัยว่า วิธีการแบ่งส่วนจะให้ค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum of Square Error : SSE) ใกล้เคียงกับการใช้ฟังก์ชัน quadprog แต่ใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่า ซึ่งผลการวิจัยพบว่าเมื่อลูกโซ่มาร์คอฟมีจำนวนสถานะเพิ่มมากขึ้นวิธีการแบ่งส่วนจะใช้เวลาในการประมาณค่าน้อยกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog ค่อนข้างมาก แต่จะให้ค่า SSE ใกล้เคียงกัน นั่นคือเมื่อลูกโซ่มาร์คอฟมีจำนวนสถานะมากกว่า 100 สถานะ วิธีการแบ่งส่วนจึงเหมาะสมที่จะนำมาใช้ในการประมาณค่ามากกว่าการใช้ฟังก์ชัน quadprog

**คำสำคัญ :** เมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ, ลูกโซ่มาร์คอฟ, วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด, วิธีการแบ่งส่วน

### Abstract

Using the restricted least squared method to estimate transition probability matrix of large scales Markov Chain is equivalent to solving a quadratic programming problem (QPP) that can be solved by the 'quadprog' function in toolbox of MATLAB. However, by using the 'quadprog' function to solve the problem, it take quite a long time. Therefore the aim of this work is to propose the decomposition method for estimation with research hypothesis: the average time to estimate transition matrix is decreased and the SSE of both methods are not different. It can be concluded that the decomposition method should be used for estimating probability statistics in transition matrix of Markov Chain when it has the number of states

in more than 100 because it has less average time to estimate transition matrix than the 'quadprog' function does.

**Keywords:** transition matrices, Markov Chain, restricted least square method, Decomposition method

## 1. บทนำ

ลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) เป็นปัญหาหนึ่งในกระบวนการสโตแคสติก (Stochastic Process) ซึ่งถูกนำไปใช้ในรูปของตัวแบบมาร์คอฟ (Markov Model) เพื่อประโยชน์ในด้านการพยากรณ์โอกาสหรือความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ในอนาคต โดยจะต้องอาศัยข้อมูลของเหตุการณ์ในปัจจุบัน กับเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ ดังรูปแบบที่แสดงใน (1)

$$\pi(k+1) = P' \pi(k) \quad (1)$$

โดยที่  $\pi(k)$  เป็นเวกเตอร์แสดงค่าความน่าจะเป็นของการเกิด

เหตุการณ์ ณ ขั้นตอนที่  $k$

เมื่อ  $k=1,2,\dots,T-1$

$$\pi(k) = \begin{bmatrix} \pi_1(k) \\ \pi_2(k) \\ \pi_3(k) \\ \vdots \\ \pi_n(k) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$P$  เป็นเมทริกซ์ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนแปลงสถานะ

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots & p_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

โดยที่ เมทริกซ์  $P$  จะต้องมีเงื่อนไข 2 ข้อ คือ

1. ผลรวมของสมาชิกทุกตัวในแถว (row) เดียวกัน จะต้องเท่ากับ 1 ดังแสดงใน (2)
2. สมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์  $P$  จะต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังแสดงใน (3)

$$Pe = e \quad (2)$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad (3)$$

เมื่อ  $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$  และ  $i=1,2,\dots,n$  ,  $j=1,2,\dots,n$

โดยที่  $n$  แทนจำนวนสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ ซึ่งมีขั้นตอนทั้งหมดเท่ากับ  $T-1$  ขั้นตอน

การประมาณค่าสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะเป็นที่สนใจศึกษาของนักวิจัยหลายท่าน ดังการศึกษารวบรวมของ Dent กับ Ballintine [1] พบว่ามีการประมาณค่าสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะสำหรับช่วยในการตัดสินใจในด้านต่าง ๆ ได้แก่ ด้านเศรษฐศาสตร์ การเกษตร สังคมวิทยา จิตวิทยา วิทยาศาสตร์ ประกันภัย การตลาด การเงิน ภาษาศาสตร์ พฤติกรรมศาสตร์ และประชากรศาสตร์ เป็นต้น ในเวลาต่อมา ตัวแบบลูกโซ่มาร์คอฟก็ยังคงได้รับความสนใจจากนักวิจัยในสาขาวิชาต่าง ๆ ดังเช่น การศึกษาความเปลี่ยนแปลงของโรคเรื้อรังด้วยตัวแบบลูกโซ่มาร์คอฟ

พของ Craig และ Sendi [2] การประมาณค่าสัดส่วนในเมทริกซ์ เพื่อการพยากรณ์ความเสี่ยงด้านเครดิต (Credit Risk) ของ Jones [3] Chistodoulakis [4] และ Simister [5] การศึกษาการอพยพย้ายถิ่นของประชากรของ Constant กับ Zimmermann [6] เป็นต้น

สำหรับวิธีในการประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะนั้น มีผู้สนใจเสนอวิธีการประมาณค่าที่แตกต่างกันหลายวิธี เช่นวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood) และวิธีการประมาณค่าของเบย์ (Bayesian Estimation) ดังการศึกษาของ Lee , Judge และ Zellner [7] วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least Square) ตามการศึกษาของ Madansky [8] และ Kalbfleisch กับ Lawless [9] วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares) ซึ่งมีทั้งกรณีที่กำลังและไม่กำลังถึงข้อจำกัด (2) และ (3) โดยในกรณีที่ไม่กำลังถึงข้อจำกัด (2) และ (3) ตามการศึกษาของ Miller [10] Goodman [11] และTelser [12] ส่วนในกรณีที่ กำลังถึงข้อจำกัด (2) และ (3) นั้นมีผู้ทำการศึกษาไว้หลายท่านได้แก่ Lee, Judge กับ Takayama [13] และTheil กับ Ray [14] ในการวิจัยนี้จะประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบกำลังถึงข้อจำกัด (2) และ (3) หรือที่เรียกว่า วิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด (Restricted Least Squares) โดยกำหนดให้ทราบค่าประมาณของ  $\pi(k)$  เมื่อ  $k=1,2,\dots,T-1$  เพื่อหาค่า  $p_{ij}$  สำหรับทุกค่า  $i, j = 1,2,\dots,n$  ที่ทำให้

$$\text{Min } \sum_{k=1}^{T-1} (\pi(k+1) - \bar{P} \pi(k))' (\pi(k+1) - \bar{P} \pi(k))$$

subject to

$$Pe=e$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

หรืออาจจะเขียนในรูปแบบ ดังต่อไปนี้

$$\text{Min } f = \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{j=1}^n \left( \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \quad (4)$$

$$\text{subject to } \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5)$$

$$p_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n \quad (6)$$

จากตัวแบบข้างต้นซึ่งก็คือปัญหาคำหนดการกำลังสอง (Quadratic Programming Problem) จึงสามารถใช้ฟังก์ชัน quadprog ที่อยู่ในกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ของโปรแกรม MATLAB ในการประมาณค่า  $p_{ij}$  ได้ จากการศึกษาโดยทำการทดลองบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (Personal Computer) หน่วยความจำ 4 GB ความจุของ Hard Disk Drive 3.3 GHz พบว่าฟังก์ชัน quadprog สามารถประมาณค่า  $p_{ij}$  ของลูกโช้มาร์คอฟที่มีจำนวนสถานะมากกว่า 200 สถานะได้ แต่จะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่ามากกว่า 12 ชั่วโมง ดังนั้นในการวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาถึงการใช้วิธีการแบ่งส่วน (Decomposition Method) ในการประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช้มาร์คอฟที่มีจำนวนสถานะตั้งแต่ 100 สถานะขึ้นไป โดยมีสมมติฐานของการวิจัยว่าวิธีการแบ่งส่วนจะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่า

## 2. แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยนี้จะทำการศึกษาการประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโช้มาร์คอฟขนาดใหญ่ด้วยวิธีการแบ่งส่วน และการ

ใช้ฟังก์ชัน quadprog ในโปรแกรม MATLAB [15] ดังรายละเอียดต่อไปนี้

## 2.1 ฟังก์ชัน quadprog

quadprog เป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการหาค่าที่ดีที่สุดของกำหนดการกำลังสอง ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\text{Minimize } \frac{1}{2} x' H x - d' x$$

$$\text{Subject to } Ax \geq b$$

$$A_{eq} x = b_{eq}$$

$$x \geq 0$$

คำสั่งที่ใช้ใน MATLAB เป็นดังนี้

[x,fval,exitflag,output,lambda]

=quadprog(D,c,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)

โดยที่ ข้อมูลนำเข้า (Input)

d คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังหนึ่งในฟังก์ชันเป้าหมาย

H คือ เมทริกซ์สมมาตรที่แสดงค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสองในฟังก์ชันเป้าหมาย

A คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในอสมการข้อจำกัด

A<sub>eq</sub> คือ เมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัด

b คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของอสมการข้อจำกัด

b<sub>eq</sub> คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทางขวามือของสมการข้อจำกัด

lb คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของตัวแปรตัดสินใจ

ub คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าขอบเขตบนของตัวแปรตัดสินใจ

x<sub>0</sub> คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าเริ่มต้นสำหรับบางวิธี

Options คือ ตัวเลือกที่กำหนดด้วยฟังก์ชัน optimset ได้แก่ จำนวนรอบสูงสุดที่ใช้ในการหาคำตอบ (MaxIter) วิธีการ (Algorithm) ซึ่งมีให้เลือก 3 วิธี คือ active-set, trust-region-reflective และ interior-point-convex เป็นต้น

ข้อมูลออก (Output)

x คือ เวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าที่ดีที่สุดของตัวแปรตัดสินใจ

fval คือ ค่าที่ดีที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย

exitflag คือ ค่าที่แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุดหรือไม่ โดยถ้า exitflag > 0 แสดงว่าวิธีการนั้นให้ค่าที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุด

output คือ ส่วนที่แสดงข้อมูลต่างๆ ที่เกี่ยวกับการหาค่าที่ดีที่สุด เช่น จำนวนรอบที่ใช้ในการหาคำตอบ วิธีการที่ใช้ เป็นต้น

lambda คือ ส่วนที่แสดงถึงตัวคูณลากรองจ์ (Lagrange multipliers) ที่สอดคล้องกับข้อจำกัดจัดรูปฟังก์ชันเป้าหมาย (4) เพื่อให้สอดคล้องกับตัวแบบที่จะใช้ฟังก์ชัน quadprog ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Min } f &= \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{j=1}^n \left( \pi_{j(k+1)} - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_{i(k)} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{j=1}^n \left( \pi_{j(k+1)} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \pi_j(k+1) \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) + \left( \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \\
& = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_j(k+1))^2 \right) - d'P + \frac{1}{2} P'HP \quad (7)
\end{aligned}$$

โดยที่ P เป็นเวกเตอร์แนวตั้งของตัวแปรตัดสินใจที่มีขนาด

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } P_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ \vdots \\ p_{in} \end{bmatrix} \quad \text{เมื่อ } i=1,2,\dots,n$$

$$d \text{ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งที่มีขนาด } n^2 \times 1 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$d_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_1(k))(\pi_1(k+1))) \\ \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_1(k))(\pi_2(k+1))) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_i(k))(\pi_n(k+1))) \end{bmatrix}, i=1,2,\dots,n$$

H เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีขนาด  $n^2 \times n^2$

$$= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่}$$

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_1(k))(\pi_1(k)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_1(k))(\pi_2(k)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_n(k))(\pi_n(k)) \end{bmatrix}$$

$A_{eq}$  เป็นเมทริกซ์ที่แสดงสัมประสิทธิ์ของตัว

แปรตัดสินใจในสมการข้อจำกัดมีขนาด  $n \times n^2$

$$A_{eq} = \begin{bmatrix} e_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_n' \end{bmatrix} \quad \text{โดยที่ } e_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$b_{eq}$  เป็นเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าคงที่ทาง

ขวามือของ

$$\text{สมการข้อจำกัดมีขนาด } n \times 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

lb เป็นเวกเตอร์แนวตั้งที่แสดงค่าขอบเขตล่างของ

$$\text{ตัวแปรตัดสินใจมีขนาด } n^2 \times 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n^2 \times 1}$$

## 2.2 วิธีการแบ่งส่วน

ในการวิจัยนี้จะประยุกต์ใช้แนวความคิดในการแบ่งเมทริกซ์ตามการศึกษาของ Whinston [16] ซึ่งได้ทำการประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของแดนทซิกและวูล์ฟ (Dantzig-Wolfe Decomposition) [17] ในการหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของปัญหากำหนดการกำลังสอง ที่ข้อจำกัดมีโครงสร้างพิเศษและสามารถแบ่งออกเป็นปัญหาหลัก และปัญหาย่อยได้ ซึ่งในการวิจัย

นี้จะประยุกต์ใช้เฉพาะแนวความคิดในส่วนของการกำหนดปัญหาย่อยเท่านั้น โดยจะทำการจัดรูปแบบของฟังก์ชันเป้าหมาย (4) ดังนี้

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{j=1}^n \left( \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^n p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{j=1}^n \left( \pi_j(k+1) \right)^2 \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{T-1} 2(\pi_j(k+1))(\pi_i(k)) \right) p_{ij} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n (\pi_i(k)) (\pi_l(k)) p_{ij} p_{il} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^{T-1} \left( \pi_j(k+1) \right)^2 \right) - C_j' P_j + P_j' D P_j \quad (8)
 \end{aligned}$$

โดยที่

$$P_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix}$$

$$C_j = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_1(k))(\pi_j(k+1))) \\ \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_2(k))(\pi_j(k+1))) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{T-1} (2(\pi_n(k))(\pi_j(k+1))) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_1(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_1(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_1(k))(\pi_n(k)) \\ \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_2(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_2(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_2(k))(\pi_n(k)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_n(k))(\pi_1(k)) & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_n(k))(\pi_2(k)) & \cdots & \sum_{k=1}^{T-1} (\pi_n(k))(\pi_n(k)) \end{bmatrix}$$

นั่นคือจากฟังก์ชัน f สามารถแบ่งเป็นปัญหาการประมาณค่าด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีเงื่อนไข จำนวน n ปัญหาย่อย (j=1,2,...,n) ดังนี้

$$\text{Minimize } f_j = \sum_{k=1}^T \left( \pi_j(k+1) \right)^2 - C_j' P_j + P_j' D P_j$$

$$\text{subject to } 0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad i=1,2,\dots,n$$

เมื่อทำการหาค่าผลลัพธ์ของแต่ละปัญหาย่อยด้วยฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB ก็จะได้ค่าของ  $P_j$  ซึ่งเมื่อนำเวกเตอร์  $P_j$  มารวมเป็นเมทริกซ์ จะพบว่าเมทริกซ์ที่ได้จะยังไม่เป็นไปตามข้อจำกัด (5) ดังนั้นจะต้องทำการปรับค่า  $p_{ij}$  ในแต่ละแถว  $i$  โดยการหารค่า  $p_{ij}$  แต่ละตัวด้วย  $\sum_{j=1}^n p_{ij}$

### 3. ตัวอย่างการคำนวณด้วยวิธีการแบ่งส่วน

จากข้อมูลส่วนแบ่งทางการตลาดของบุหรี่ยี่ห้อ [14] ซึ่งมีข้อมูลทั้งหมด 19 ปี ดังนี้

ปีที่	ยี่ห้อบุหรี่ยี่ห้อ		
	A	B	C
1	0.5056	0.2028	0.2916
2	0.4879	0.1899	0.3222
3	0.4504	0.2236	0.326
4	0.4068	0.3039	0.2893
5	0.3637	0.3616	0.2747
6	0.3365	0.4118	0.2517

7	0.3311	0.4425	0.2264
8	0.2936	0.4498	0.2566
9	0.2794	0.4008	0.3198
10	0.3418	0.3301	0.3281
11	0.3867	0.3013	0.312
12	0.4074	0.2906	0.302
13	0.4084	0.2949	0.2967
14	0.3842	0.3195	0.2963
15	0.3746	0.3358	0.2896
16	0.3708	0.35	0.2792
17	0.3579	0.3653	0.2768
18	0.3527	0.3851	0.2622
19	0.3276	0.3875	0.2849

ตัวแบบสำหรับการประมาณค่า  $p_{ij}$

$$\begin{aligned} \text{Min } f &= \sum_{k=1}^{18} \sum_{j=1}^3 \left( \pi_j(k+1) - \sum_{i=1}^3 p_{ij} \pi_i(k) \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^{18} \left( \pi_j(k+1) \right)^2 \right) - C'_j P_j + P'_j D P_j \\ \text{subject to } & \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n \\ & p_{ij} \geq 0, \quad i, j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

โดยที่  $P_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 5.1529 \\ 4.2868 \\ -3.8832 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 4.5653 \\ 4.2222 \\ -3.5005 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 3.9608 \\ 3.4096 \\ -3.0186 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5.3169 & 4.3864 & 3.9756 \\ 4.3864 & 4.1378 & 3.3944 \\ 3.9756 & 3.3944 & 3.0324 \end{bmatrix}$$

แบ่งเป็นปัญหาย่อยจำนวน 3 ปัญหาย่อย ดังนี้

$$\text{Minimize } f_1 = 2.5102 - C'_1 P_1 + P'_1 D P_1$$

subject to  $0 \leq p_{i1} \leq 1, \quad i=1,2,3$

$$\text{Minimize } f_2 = 2.1779 - C'_2 P_2 + P'_2 D P_2$$

subject to  $0 \leq p_{i2} \leq 1, \quad i=1,2,3$

$$\text{Minimize } f_3 = 1.5123 - C'_3 P_3 + P'_3 D P_3$$

subject to  $0 \leq p_{i3} \leq 1, \quad i=1,2,3$

ใช้ฟังก์ชัน quadprog ในโปรแกรม MATLAB ในการแก้ปัญหาย่อยทั้งสาม ได้ค่าประมาณของ  $P_1, P_2, P_3$  ดังนี้

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5905 \\ 0 \\ 0.5064 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.1341 \\ 0.8782 \\ 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0.0972 \\ 0.1090 \\ 0.7460 \end{bmatrix}$$

ปรับค่า  $p_{ij}$  ในแต่ละแถว  $i$  โดยการหารค่า  $p_{ij}$  ด้วย  $\sum_{j=1}^n p_{ij}$  ซึ่งได้ผลดังนี้

$$P = \begin{bmatrix} 0.7185 & 0.1632 & 0.1183 \\ 0 & 0.8896 & 0.1104 \\ -0.4043 & 0 & 0.5957 \end{bmatrix}$$

#### 4. วิธีวิจัย

ในการวิจัยนี้ได้ทำการทดลองบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล (Personal Computer) หน่วยความจำ 4 GB ความจุของ Hard Disk Drive 3.3 GHz โดยในแต่ละสถานการณ์จะทำซ้ำจำนวน 5 รอบ สามารถแบ่งขั้นตอนในการวิจัยได้เป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

4.1 จำลองข้อมูลที่จะใช้ในการประมาณค่าสถิติ ส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟ

มีขั้นตอนดังนี้

4.1.2 สร้างเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะ P โดย  
ส้อม ขนาด  $n \times n$  ซึ่งกำหนดให้มีจำนวนสถานะ  $n$  แยก  
เป็น 2 ส่วนคือ

- สำหรับการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการ  
ประมาณค่าและค่าผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลัง  
สองระหว่างการใช้ ฟังก์ชัน quadprog กับการใช้  
วิธีการแบ่งส่วน จะกำหนดจำนวนสถานะ  $n$  เป็น 10 ,  
20 , 30 , 40 , 50 , 60 , 70 และ 80

- สำหรับการประมาณค่าด้วยวิธีการแบ่ง  
ส่วนเพียงวิธีเดียว จะกำหนดจำนวนสถานะ  $n$  เป็น  
100 , 120 , 140 , 160 , 180 , 200 , 250 , 500 และ  
1,000

4.1.2 จากเมทริกซ์ P ที่ได้ใน 4.1.1 จำลองข้อมูลดังตัว  
แบบ (1) ให้มีขนาด  $n \times T$  โดยกำหนดให้มีจำนวน  
ขั้นตอน  $T$  เป็น 10 , 20 , 40 , 80 และ 100

4.2 สร้างเมทริกซ์และเวกเตอร์ให้สอดคล้องกับ (7)  
และ (8)

4.3 สร้างชุดคำสั่งบนโปรแกรม MATLAB เพื่อ  
ประมาณค่าในแต่ละวิธี แล้วทำการจดบันทึกเวลา  
เฉลี่ยในการประมาณค่า และค่าผลรวมความ  
คลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum of Square Error :  
SSE)

4.4 วิเคราะห์ผล โดยการเปรียบเทียบเวลาเฉลี่ยใน  
การประมาณค่า และค่าผลรวมความคลาดเคลื่อน  
กำลังสอง

## 5. ผลการวิจัย

จากการดำเนินการตามขั้นตอนต่าง ๆ ข้างต้น  
สำหรับกรณีที่จำนวนสถานะ  $n$  น้อยกว่า 100 สถานะ  
ได้ผลดังแสดงในตารางที่ 1 เมื่อพิจารณาค่าร้อยละ

ความแตกต่างระหว่างค่าสัมบูรณ์ของ SSE ที่ได้จาก  
การใช้วิธีการแบ่งส่วน กับการใช้ฟังก์ชัน quadprog  
เทียบกับค่า SSE ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog  
พบว่า ที่จำนวนสถานะ  $n$  น้อยกว่า 50 สถานะ ค่า  
SSE ของทั้งสองวิธีมีความแตกต่างกันค่อนข้าง  
มาก แต่เมื่อจำนวนสถานะ  $n$  เพิ่มขึ้น ความแตกต่าง  
ของค่า SSE จะน้อยลง และเมื่อพิจารณาตามเวลาที่  
ใช้ในการประมาณค่าจะพบว่า เมื่อจำนวนสถานะ  $n$   
เพิ่มขึ้น การประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมทริกซ์การ  
เปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟด้วยวิธีการแบ่ง  
ส่วนจะใช้เวลาเฉลี่ยในการประมาณค่าน้อยกว่าการใช้  
ฟังก์ชัน quadprog ค่อนข้างมาก ดังนั้นสำหรับกรณีที่  
จำนวนสถานะ  $n$  ตั้งแต่ 100 สถานะขึ้นไป จะนำเสนอ  
เฉพาะค่า SSE และเวลาที่ใช้ในการประมาณค่าสถิติ  
สัดส่วนในเมทริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่  
มาร์คอฟด้วยวิธีการแบ่งส่วนเท่านั้นโดยนำเสนอใน  
ตารางที่ 2 ซึ่งพบว่า ถ้าจำนวนสถานะของลูกโซ่  
มาร์คอฟไม่เกิน 200 สถานะจะใช้เวลาในการ  
ประมาณค่าไม่ถึง 10 วินาที หรือถ้ามีจำนวนสถานะ  
มากถึง 1,000 สถานะก็จะใช้เวลาในการประมาณ  
ค่าเฉลี่ยประมาณ 20 นาที

## 6. สรุปผลการวิจัย

เมื่อต้องการประมาณค่าสถิติสัดส่วนในเมท  
ริกซ์การเปลี่ยนแปลงสถานะของลูกโซ่มาร์คอฟขนาด  
ใหญ่ วิธีการแบ่งส่วนที่นำเสนอในการวิจัยนี้เป็นวิธีการ  
หนึ่งที่น่าสนใจ เนื่องจากให้ค่า SSE ใกล้เคียงกับการ  
ใช้ฟังก์ชัน quadprog ของโปรแกรม MATLAB แต่ใช้  
เวลาในการประมาณค่าน้อยกว่าหลายร้อยเท่า



## เอกสารอ้างอิง

- [1] Dent, W. and R. Ballintine. 1971. "A review of the Estimation of Transition Probabilities in Markov Chain". The Australian Journal of Agricultural Economics. 15(2): 69-81.
- [2] Craig, B.A. and P.P. Sendi. 2002. "Estimation of the transition matrix of a discrete-time Markov Chain". Health Economics.11: 33-42.
- [3] Jones, M.T. 2005. "Estimating Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk". IMF Working Paper. 219.
- [4] Christodoulakis A.G. 2006. "Markovian Credit Risk Transition Probabilities under Non-Negativity Constraints for US Portfolio 1984-2004". Bank of Greece.
- [5] Simister, Z. 2007. "Maximum Likelihood Approach to the estimation of Markov Transition Matrices Using Proportions Data: An Application to Credit Risk". Bank of Jamaica.
- [6] Constant, A. F. and K. F. Zimmermann (2012), "The Dynamics of Repeat Migration: A Markov Chain Analysis", International Migration Review, 46 (2), 361-387.
- [7] Lee, T.C., G.G. Judge, and A. Zellner. 1968. "Maximum Likelihood and Bayesian Estimation of Transition Probabilities". Journal of the American Statistical Association. 63: 1162-1179.
- [8] Madansky, A. 1959. "Least Squares Estimation in Finite Markov Processes". Psychometrika. 24: 137-144.
- [9] Kalbfleisch, J.D. and J.F. Lawless. 1984. "Least-Squares Estimation of Transition Probabilities from Aggregate Data". The Canadian Journal of Statistics. 12(3): 169-182.
- [10] Miller, G.A. 1952. "Finite Markov Processes in Psychology". Psychometrika. 17: 149-167.
- [11] Goodman, L.A. 1953. "A Further Note on Miller's Finite Markov Processes in Psychology". Psychometrika. 18: 245-248.
- [12] Telser, L.G. 1966. "Least Squares Estimates of Transition Probabilities". Measurement in Economics. Stanford University Press. 270-293.
- [13] Lee, T.C., G.G. Judge, and T. Takayama. 1965. "On Estimating the Transition Probabilities of a Markov Process". Journal of Farm Economics. 47: 742-762.
- [14] Theil, H., and G. Rey. 1966. "A Quadratic Programming Approach to the Estimation of Transition Probabilities". Management Science. 12(9): 714-721.
- [15] MATLAB Documentation Center:  
<http://www.mathworks.com/help/optim/ug/qquadprog.html>
- [16] Whinston, A. 1966. "A Decomposition Algorithm for Quadratic Programming".

Cowles Foundation Paper 239. 8(2): 112-131.

“Decomposition Principle for Linear Programs”.

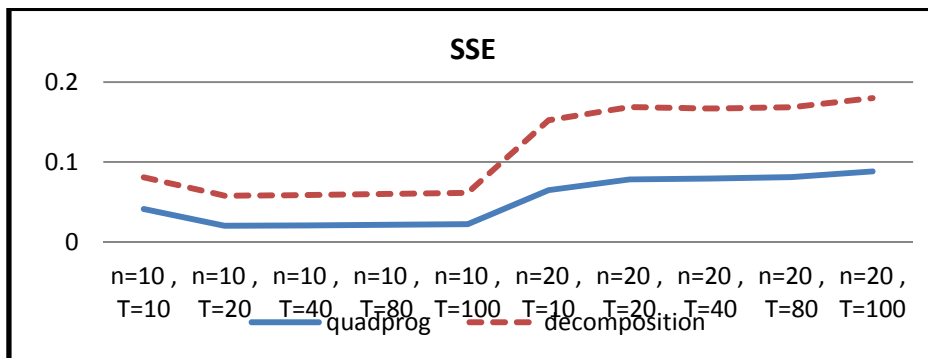
[17] Dantzig, G.B. and P. Wolfe. 1960.

Operations Research. 8.

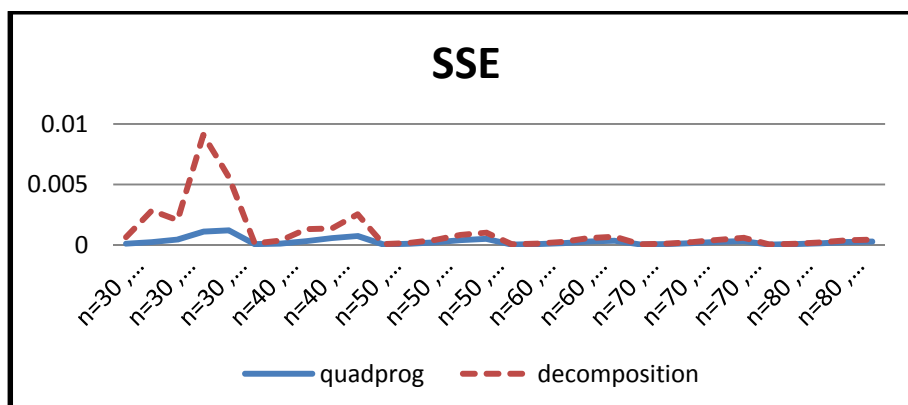
ตารางที่ 1 แสดงค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสองและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่า จำแนกตามวิธีการ และร้อยละความแตกต่างระหว่างค่า SSE ของทั้งสองวิธี เทียบกับค่าที่ได้จากฟังก์ชัน quadprog

จำนวนสถานะ n	จำนวนขั้นตอน T	ฟังก์ชัน quadprog		วิธีการแบ่งส่วน		ร้อยละความแตกต่างของค่าSSE
		SSE	เวลาในการประมาณ	SSE	เวลาในการประมาณ	
10	10	$2.8626 \times 10^{-4}$	0.0411	0.0723	0.0398	25156.76
	20	$9.9782 \times 10^{-4}$	0.0202	0.1653	0.0377	16466.11
	40	0.0030	0.0205	0.3176	0.0382	10486.67
	80	0.0052	0.0214	0.4795	0.0387	9121.15
	100	0.0068	0.0222	0.7079	0.0392	10310.29
20	10	$1.3953 \times 10^{-4}$	0.0649	0.0092	0.0874	6493.56
	20	$3.4498 \times 10^{-4}$	0.0783	0.0118	0.0903	3320.49
	40	$8.8007 \times 10^{-4}$	0.0792	0.0382	0.0877	4240.56
	80	0.0021	0.0811	0.0901	0.0873	4190.48
	100	0.0022	0.0883	0.1323	0.0915	5913.64
30	10	$1.0300 \times 10^{-4}$	0.2732	$5.4830 \times 10^{-4}$	0.1540	432.33
	20	$2.3563 \times 10^{-4}$	0.2906	0.0026	0.1537	1003.42
	40	$4.5468 \times 10^{-4}$	0.2737	0.0016	0.1469	251.90
	80	0.0011	0.3087	0.0080	0.1534	627.27
	100	0.0012	0.3128	0.0044	0.1528	266.67
40	10	$5.6082 \times 10^{-5}$	1.0316	$5.5874 \times 10^{-5}$	0.2420	0.37
	20	$1.3112 \times 10^{-4}$	1.0646	$2.6925 \times 10^{-4}$	0.2309	105.35
	40	$3.1998 \times 10^{-4}$	1.0767	$9.9347 \times 10^{-4}$	0.2282	210.58
	80	$5.7071 \times 10^{-4}$	1.0814	$7.9399 \times 10^{-4}$	0.2296	39.12
	100	$7.3949 \times 10^{-4}$	1.0884	0.0018	0.2302	143.41
50	10	$4.0751 \times 10^{-5}$	5.2242	$3.3175 \times 10^{-5}$	0.3631	18.59
	20	$8.9111 \times 10^{-5}$	5.2032	$8.1762 \times 10^{-5}$	0.3481	8.25
	40	$2.0605 \times 10^{-4}$	5.3329	$2.0152 \times 10^{-4}$	0.3238	2.20
	80	$3.9972 \times 10^{-4}$	5.1377	$4.2826 \times 10^{-4}$	0.3455	7.14
	100	$5.0434 \times 10^{-4}$	5.4145	$5.2252 \times 10^{-4}$	0.3443	3.60
60	10	$3.0291 \times 10^{-5}$	19.9159	$2.0881 \times 10^{-5}$	0.5280	31.07
	20	$6.7679 \times 10^{-5}$	19.8151	$5.3340 \times 10^{-5}$	0.6066	21.19
	40	$1.4522 \times 10^{-4}$	19.8277	$1.2410 \times 10^{-4}$	0.4950	14.54
	80	$2.9085 \times 10^{-4}$	20.1032	$2.8602 \times 10^{-4}$	0.4888	1.66
	100	$3.4266 \times 10^{-4}$	19.9177	$3.2701 \times 10^{-4}$	0.4765	4.57

จำนวนสถานะ n	จำนวนขั้นตอน T	ฟังก์ชัน quadprog		วิธีการแบ่งส่วน		ร้อยละความแตกต่างของค่าSSE
		SSE	เวลาในการประมาณ	SSE	เวลาในการประมาณ	
70	10	$3.5916 \times 10^{-5}$	56.7337	$1.2841 \times 10^{-5}$	0.7656	64.25
	20	$6.5341 \times 10^{-5}$	56.6855	$3.6835 \times 10^{-5}$	0.7510	43.63
	40	$1.3847 \times 10^{-4}$	56.3064	$1.0330 \times 10^{-4}$	0.7472	25.40
	80	$2.4866 \times 10^{-4}$	56.0143	$1.7763 \times 10^{-4}$	0.7102	28.57
	100	$3.1790 \times 10^{-4}$	55.2967	$2.7282 \times 10^{-4}$	0.6747	14.18
80	10	$3.3280 \times 10^{-5}$	125.6306	$1.3576 \times 10^{-5}$	0.9077	59.21
	20	$5.9041 \times 10^{-5}$	126.3160	$3.1372 \times 10^{-5}$	0.9548	46.86
	40	$1.3393 \times 10^{-4}$	123.6948	$7.6197 \times 10^{-5}$	0.9611	43.11
	80	$2.4004 \times 10^{-4}$	123.7975	$1.4703 \times 10^{-4}$	1.1165	38.75
	100	$2.9711 \times 10^{-4}$	123.6773	$1.6702 \times 10^{-4}$	1.0819	43.79



รูปที่ 1 ค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog และวิธีการแบ่งส่วน (Decomposition) ที่ n ไม่เกิน 20



รูปที่ 2 ค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (SSE) จากการใช้ฟังก์ชัน quadprog และวิธีการแบ่งส่วน (Decomposition) ที่ n มากกว่า 20

ตารางที่ 2 แสดงค่าเฉลี่ยของผลรวมของความคลาดเคลื่อน กำลังสองและเวลาเฉลี่ย (วินาที) ที่ใช้ในการประมาณค่าด้วยวิธีการแบ่งส่วน

จำนวนสถานะ n	จำนวนขั้นตอน T	วิธีการแบ่งส่วน	
		SSE	เวลาในการประมาณ
100	10	$1.0756 \times 10^{-5}$	1.4660
	20	$2.1211 \times 10^{-5}$	1.5774
	40	$4.4598 \times 10^{-5}$	1.4396
	80	$6.0088 \times 10^{-5}$	1.4802
	100	$1.0329 \times 10^{-4}$	1.4695
120	10	$6.0121 \times 10^{-6}$	2.4449
	20	$1.3864 \times 10^{-5}$	2.3181
	40	$2.7933 \times 10^{-5}$	2.3496
	80	$5.0090 \times 10^{-5}$	2.3312
	100	$7.0649 \times 10^{-5}$	2.2991
140	10	$6.0544 \times 10^{-6}$	3.5181
	20	$1.2088 \times 10^{-5}$	3.4536
	40	$1.3992 \times 10^{-5}$	3.5376
	80	$3.3558 \times 10^{-5}$	3.5886
	100	$4.8283 \times 10^{-5}$	3.4808
160	10	$2.0259 \times 10^{-5}$	4.6234
	20	$1.9282 \times 10^{-5}$	4.6708
	40	$1.4308 \times 10^{-5}$	4.7238
	80	$3.1043 \times 10^{-5}$	4.6516
	100	$3.0619 \times 10^{-5}$	4.6739
180	10	$5.5020 \times 10^{-5}$	6.4559
	20	$1.0060 \times 10^{-4}$	6.4392
	40	$5.6486 \times 10^{-5}$	6.6829
	80	$3.4189 \times 10^{-5}$	6.5754
	100	$3.7169 \times 10^{-5}$	6.4718
200	10	$1.3708 \times 10^{-5}$	8.3602
	20	$1.3133 \times 10^{-5}$	8.1714
	40	$3.4121 \times 10^{-5}$	8.4456
	80	$4.5452 \times 10^{-5}$	8.4550
	100	$2.9754 \times 10^{-5}$	8.5159

จำนวนสถานะ n	จำนวนขั้นตอน T	วิธีการแบ่งส่วน	
		SSE	เวลาในการประมาณ
250	10	$8.3902 \times 10^{-6}$	16.4065
	20	$3.6361 \times 10^{-6}$	15.0969
	40	$5.0065 \times 10^{-6}$	15.5965
	80	$1.0753 \times 10^{-5}$	15.7215
	100	$1.2091 \times 10^{-5}$	15.5851
500	10	$2.6807 \times 10^{-7}$	132.0469
	20	$4.9426 \times 10^{-7}$	121.5843
	40	$9.3410 \times 10^{-7}$	119.5634
	80	$2.1056 \times 10^{-6}$	122.4724
	100	$5.0983 \times 10^{-6}$	123.9986
1000	10	$5.8845 \times 10^{-8}$	$1.3141 \times 10^3$
	20	$4.7418 \times 10^{-8}$	$1.1877 \times 10^3$
	40	$7.4658 \times 10^{-8}$	$1.1413 \times 10^3$
	80	$3.8162 \times 10^{-7}$	$1.1428 \times 10^3$
	100	$4.6954 \times 10^{-7}$	$1.1497 \times 10^3$